Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI1
2013-01-31 kl. 08.00—10.00

1. a) Integralen beräknas med hjälp av ett variabelbyte:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \begin{bmatrix} y=1+x^4,\ dy/dx=4x^3 \Rightarrow x^3dx=\frac{1}{4}dy \\ x=0\Rightarrow y=1,\quad x=1\Rightarrow y=2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{6}\left[y^{3/2}\right]_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{6}$$

b) Integralen är generaliserad i ∞ så

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

2. Metod 1: via omskrivning och ett variabelbyte

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \begin{bmatrix} y=\sin x,\ dy/dx=\cos x\Rightarrow \cos x\,dx=dy \\ x=0\Rightarrow y=0,\ x=\pi/2\Rightarrow y=1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \left(1-y^2\right)dy = \left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Metod 2: vi använder en av Eulers formler och sedan binomialsatsen för att skriva om integranden:

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) = \frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$$

(otroligt nog. Plotta bägge uttryck så får ni se att det är en och samma funktion). Detta ger

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x\right)dx = \left[\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{12}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{12}+\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

så bägge metoder ger samma svar.

Man kan även beräkna integralen med hjälp av partiell integration men detta ger en lite längre uträkning.

3. Integranden är en rationell funktion så vi använder vår 4-stegsmetod. Steg1 (polynomdivision) behövs ej då täljaren är ett polynom av grad 1 medan nämnaren är ett polynom an grad 3. Steg 2 - faktorisering av nämnaren - är redan utfört så vi går till Steg 3 - PBU (partialbråksuppdelningen). Den rätta ansatsen (se tabell, sid. 252 i boken) är

$$\frac{2x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

där konstanten C kan vi få via "handpåläggning":

$$C = \left.\frac{2x-3}{x^2+1}\right|_{x=1} = -\frac{1}{2}$$

Vi får alltså

$$\frac{2x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{-1/2}{x-1}$$

och genom att sätta allt under gemensam nämnare och jämföra koefficienter av polynom i täljare på bägge led får vi att $A = \frac{1}{2}$ medan $B = \frac{5}{2}$. Detta ger den sökta PBU

$$\frac{2x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}{x^2+1} + \frac{-1/2}{x-1}$$

så vi kan nu gå till Steg 4 - integration. Vi får

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{(x^2+1)(x-1)}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{5}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

(där den första intergalen beräknades med hjälp av formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

med $f(x) = x^2+1$.

4. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 285.

   b) Vi börjar med i). Insättningsformeln ger

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F\left(\psi(x)\right) - F\left(\varphi(x)\right)$$

(där $F' = f$) så, enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F'(\psi(x))\psi'(x) - F'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

vilken ger den formeln som vi ibland - lite skämtsamt - kallar för "superformeln":

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

som tillämpad på $S(x)$ ger

$$S'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}e^x - 0 = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

Dags för ii) - vi beräknar först $S(x)$ (med hjälp av en standardprimitiv):

$$S(x) = \int\limits_0^{e^x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \left[\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^{e^x} = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right)$$

och sedan deriverar den med avseende på x; vi använder då kedjeregeln:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)' = \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}(2e^{2x}+0)\right) = \\ &= \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\left(e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right) = \frac{1}{e^x+\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot\frac{e^x(1+e^x\sqrt{e^{2x}+1})}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \end{aligned}$$

och får alltså samma resultat som i i).