Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

för BI

2013–03–13 kl. 08.00-13.00

1. Uppgiften går ut på att först hitta den allmänna lösningen av ekvationen och sedan hitta den lösning som även uppfyller bivillkoret/begynnelsevillkoret $y(3) = 0$. Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen varför metod av integrerande faktor är lämplig (ekvationen är inte separabel). Innan vi tillämpar metoden måste vi dock förbereda ekvationen genom att dela den ledvis med x så att koefficienten vid y' blir 1. Vi får
$$y' - \frac{y}{x} = 2x^2 \tag{1}$$
Som vi ser har ekvationen (1) en singularitet i 0 och vi får lösa den då för $x \neq 0$. En (utav oändligt många) integrerande faktor blir då
$$h(x) = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|} = \pm\frac{1}{x}$$
så att både till vänster och till höger om $x = 0$ kan vi anta att $h(x) = +\frac{1}{x}$. Multiplicerar vi ekvationen (1) ledvis med h får vi
$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 2x$$
och VL kan nu skrivas som en produkt av h och den sökta allmänna lösningen
$$\left(\frac{y}{x}\right)' = 2x$$
vilket ger
$$\frac{y}{x} = 2\int x dx = x^2 + C$$
så att den allmänna lösningen blir
$$y(x) = x^3 + Cx$$
Detta kan lätt kontrolleras genom att stoppa lösningen tillbaka in i den ursprungliga ekvationen (gör det). Vidare, kravet $y(3) = 0$ ger oss $0 = 27 + 3C$ vilket ger att $C = -9$. Således, den sökta lösningen är $y(x) = x^3 - 9x$.

2. Differentialekvationen
$$y'' + 2y' - 3y = -3x - 1 + 15\sin 3x$$
är linjär av 2:a ordningen med konstanta koefficienter och den allmänna lösningen till den hittar vi därför via formeln (se Sats 9.1 sid. 395)
$$y = y_h + y_p$$
där y_h är den allmänna lösningen av den homogena delen av ekvationen medan y_p är en partikulär lösning av hela ekvationen; y_p hittar vi via den karakteristiska ekvationen som här antar formen
$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

med två skilda reella lösningar $r_1 = 1$ och $r_2 = -3$, vilket ger att y_h blir

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Dags för y_p och vi använder oss av superpositionsprincipen (sid. 395 i boken) och letar för y_p i formen

$$y = y_{p_1} + y_{p_2}$$

där y_{p_1} är en partikulär lösning av ekvationen med HL$= -3x - 1$ medan y_{p_2} är en partikulär lösning av ekvationen med HL$= 15\sin(3x)$. Den korrekta ansatsen för y_{p_1} är $y_{p_1} = Ax + B$ och leder till

$$y_{p_1} = x + 1$$

medan den rätta ansatsen för y_{p_2} är $y_{p_2} = A\sin 3x + B\cos 3x$ vilket ledr till

$$y_{p_2} = -\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x$$

Således, den allmänna lösningen av hela ekvationen blir

$$y = y_h + y_p = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + x + 1 - \sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x.$$

3. a) Se boken, Sats 8.2 sid. 354.

   b) Vi börjar med i) Eftersom $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ och $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ (obs, det räcker) får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

   Dags för ii). För att tillämpa Maclaurin här (som gäller för SMÅ elefanter) måste vi först göra variabelbytet $t = 1/x$. Vi får

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x\cos\frac{1}{x} - x\right) &= \lim_{t\to 0_+}\left(\frac{1}{t}\cos t - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0_+}\frac{\cos t - 1}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0_+}\frac{1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4) - 1}{t} = \lim_{t\to 0_+}\left(-\frac{1}{2}t + O(t^3)\right) = 0.
\end{aligned}$$

4. a) Vi använder formeln på sid. 323 ("skivformeln") och får

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2$$

   b) I detta fall använder vi "rörformeln" längre ner på samma sida 323. Vi får

$$V = 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

   och denna integral löses enklast via partiell integration (vi deriverar då x och integrerar $\sin x$). Detta ger

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx = \begin{bmatrix} f = \sin x, & g = x \\ F = -\cos x, & g' = 1 \end{bmatrix} = 2\pi\left([-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx\right) = \\
&= 2\pi\left(\pi - [\sin x]_0^\pi\right) = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

5. Kurvan

$$x(t) = 2 + \cos t, \quad y = 3 + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

är förstås en halvcirkel med radien 1 och med mittpunkten i $(2,3)$ och har således längd π. Men vi skall *beräkna* detta här, och den sökta längden beräknas då via formeln på sid. 319:

$$l = \int_0^\pi \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t^2) + (\cos t)^2} dt = \int_0^\pi dt = [t]_0^\pi = \pi.$$

6. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{för } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

är naturligtvis Riemannintegrerbar oavsett värden på koefficienterna a och b så den blir en täthetsfunktion för en stokastisk variabel X om dels $f \ge 0$ överallt (detta kollar vi sist) och dels om

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \tag{2}$$

Integralen i (2) kan lätt uträknas:

$$\int_0^1 \left(ax^2 + b\right) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + b$$

så att villkoret (2) blir

$$\frac{a}{3} + b = 1$$

Vidare, eftersom

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 \left(ax^3 + bx\right) dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2}$$

kravet $E(X) = \frac{2}{3}$ blir

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{2}{3}$$

Vi fick alltså två villkor som våra två konstanter måste uppfylla:

$$\frac{a}{3} + b = 1 \quad \text{och} \quad \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{2}{3}$$

Detta enkla ekvationssystem har entydig lösning: $a = 2$ och $b = \frac{1}{3}$ som alltså löser uppgiften ty funktionen f med dessa värden på a och b uppfyller även kravet att $f \ge 0$ överallt.

7. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 285. (1p)

   b) Analysens huvudsats leder till formeln

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\right) = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$$

som i vårt fall ger

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t \ln t\, dt\right) = 2xe^{x^2}\ln\left(x^2\right) - e^{\sqrt{x}}\ln\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(4xe^{x^2} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}\right)\ln x$$

där den sista likheten följer ur logaritmlagar; vi använder då att $x > 0$ när vi skriver om $\ln(x^2)$ som $2\ln x$.