Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI
2013–06–05 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 387.

   b) Differentialekvationen
$$y' - y^2 = 1$$
är separabel (den är INTE linjär pga. y^2-termen så integrerande faktor-metoden kan ej tillämpas): skriver vi y' som $\frac{dy}{dx}$ och flyttar y^2 till HL får vi
$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$
så nu kan vi lätt separera variabler i ekvationen; vi får
$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$
Vidare, ledvis integration ger ekvationens allmänna lösning i implicit form
$$\arctan y = x + C$$
Den lösning vi letar efter skall uppfylla villkoret $y(\frac{\pi}{4}) = 1$ så att $y = 1$ så snart $x = 1$vilket ger $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} + C$ och således $C = 0$. Således, den sökta lösningen är $\arctan y = x$ eller, i explicit form,
$$y = \tan x$$
Detta kan lätt kontrolleras genom att sätta lösningen dels i den ursprungliga ekvationen och dels i begynnelsevillkoret.

2. Vi skall hitta samtliga lösningar till differentialekvationen
$$y'' + y = xe^{2x}$$
Vi letar först efter den homogena lösningen y_h. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har två komplex konjugerade rötter $\pm i$ så att
$$y_h = A\cos x + B\sin x.$$
Det återstår att hitta en partikulär lösning y_p till hela ekvationen. Den rätta ansatzen är $y_p = z(x)e^{2x}$. Stoppar vi in detta i differentialekvationen får vi
$$e^{2x}\left(z'' + 4z' + 5z\right) = xe^{2x}$$
eller, eftersom $e^{2x} > 0$ alltid,
$$z'' + 4z' + 5z = x$$
som vi löser genom en ansatz $z_p = Ax + B$. Insatt i ekvationen ovan ger den efter några enkla räkningar $z_p = \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}$. Således, $y_p = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{2x}$ och den allmänna lösningen till hela ekvationen blir
$$y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{5}\left(x - \frac{4}{5}\right)e^{2x}.$$

3. Den givna kurvan är helt enkelt den övre halvan av cirkeln med radien $r = 1$ och med mittpunkten i $(1, 0)$, varför den sökta längden blir

$$l = \pi r = \pi.$$

Om man inte inser det måste man beräkna längden på det sedvanliga sättet, genom att använda den kända formeln (se sid. 317 i boken):

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

I vårt fall

$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}},$$

så att

$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{(1-x)^2}{2x - x^2} = \frac{2x - x^2 + 1 - 2x + x^2}{2x - x^2} = \frac{1}{2x - x^2}.$$

Det betyder att

$$l = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}\, dx = [\arcsin(x-1)]_0^2 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

4. Ellipsens ekvation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kan lösas m.a.p. variabeln y; vi får då

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

där $+$ ger den övre halvellipsen (den delen av ellipsen som sitter ovanför x-axeln) och $-$ ger den nedre halvellipsen. Den sökta volymen ges då av skivformeln på sid. 323 i boken som i vårt fall ger:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2(x)\, dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

vilket förstås återskapar den korrekta formeln för volym av klot då $a = b$. Ni kan också lätt gissa resultatet vi får om vi roterar vår ellips kring y-axeln istället av x-axeln.

5. a) Se Sats 8.2, sid. 354 i boken.

   b) Vi använder Maclaurinutveckling av cos och får

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 - 2\cos x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 - 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + O(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12} + O(x^2)\right) = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

6. a) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

är självklart icke negativ ($f \geq 0$) så det återstår att kolla om

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Eftersom funktionen är skild från noll bara på intervallet $[0,1]$ får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{\pi}\left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}(\arctan 1 - \arctan 0) = 1$$

b) Vi börjar med $E(X)$. Enligt definition av $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{2\ln 2}{\pi}$$

I uträkningen av integralen ovnan utnyttjade vi formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Vidare, medianen $x_{0.50}$ uppfyller sambandet

$$\int_{-\infty}^{x_{0.50}} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

vilket i vårt fall ger

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{x_{0.50}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}$$

eller

$$\arctan x_{0.50} = \frac{\pi}{8}$$

så att medianen för X blir

$$x_{0.50} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

Den sista likheten följer ganska lätt ur den välkända formeln

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

om vi tar $\alpha = \beta = \pi/8$ för då är $\alpha + \beta = \pi/4$ och således $\tan(\alpha+\beta) = 1$ så att identiteten ovan antar formen

$$1 = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2\frac{\pi}{8}}$$

ur vilken är det lätt att räkna ut $\tan\frac{\pi}{8}$.

7. a) Se Sats 6.7 sid. 285 i boken.

b) Vi deriverar integralekvationen

$$y(x) = x^2 + \int_0^x y(t)dt$$

med hjälp av analysens huvudsats. Vi får en linjär DE av 1:a ordningen

$$y' = 2x + y \tag{1}$$

och vi kan lösa den med hjälp av integrerande faktor. Notera att från integralekvationen ovan får vi även ett begynnelsevillkor: stoppar vi in $x = 0$ i denna ekvation får vi

$$y(0) = 0 + \int_0^0 y(t)dt = 0$$

Vi löser nu differentialekvationen (1). Vi skriver om den först genom att flytta y till VL:

$$y' - y = 2x \tag{2}$$

En (utav oändligt många) integrerande faktor blir då

$$h(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

Multiplicerar vi differentialekvationen (2) med h får vi

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 2xe^{-x}$$

eller

$$\left(e^{-x}y\right)' = 2xe^{-x}$$

Detta ger

$$e^{-x}y = 2\int xe^{-x}\,dx = -2(1+x)e^{-x} + C$$

(den sista likheten visas med partiell integration) så att den allmänna lösningen av differentialekvationen (1) eller (2) blir

$$y = Ce^x - 2(1+x)$$

bivillkoret $y(0) = 0$ ger till sist att $C = 2$. Det betyder att den sökta funktionen är

$$y = 2(e^x - x - 1)$$

En kontroll kan göras genom att sätta resultatet i exempelvis ekvationen (1) (bivillkoret $y(0) = 0$ är förstås uppfylld av lösningen ovan).