Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)

för BI

2013–08–31 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 382.

   b) Ekvationen är linjär av 1:a ordningen så vi löser den med hjälp av integrerande faktor. En (utav många) integrerande faktor är $h(x) = e^{F(x)}$ där

$$F(x) = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

(vi vet att vi kan alltid välja integrationskonstanten $C = 0$ i uträkningen ovan). Det betyder att

$$h(x) = e^{\ln\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$$

Multiplicerar ci vår DE ledvis med h får vi

$$y'\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Som vanligt, VL blir nu derivata av produkten av y och h:

$$\left(y\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

vilket ger

$$y\sqrt{1+x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Integralen på HL är en standardprimitiv och vi får

$$y\sqrt{1+x^2} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

så den allmänna lösningen av vår differentialekvation är

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C\right)$$

Vi letar nu efter den lösning som uppfyller kravet $y(0) = 0$. Sätter vi in detta krav i lösningen ovan får vi att $C = 0$ så den sökta lösningen till sist är:

$$y = \frac{\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Vi börjar med att hitta y_h dvs. den allmänna lösningen för den homogena delen av ekvationen. Detta gör vi genom att hitta rötter till karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ som är $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$. Det betyder att

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{3x}$$

Dags att hitta y_p dvs. en partikulär lösning till hela differentialekvationen. En lämplig ansats är $y_p = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$ och genom att sätta in den i differentialekvationen får vi att $A = -\frac{1}{2}$ medan $B = 0$. Det betyder att den allmänna lösningen av hela ekvationen blir

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

Vi skall nu fånga ur denna mängd av lösningar den lösning som tangerar x-axeln i origo dvs. den som uppfyller två krav: $y(0) = 0$ samt $y'(0) = 0$. Det första kravet ger

$$0 = C_1 + C_2$$

och eftersom

$$y'(x) = C_1e^x + 3C_2e^{3x} - e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}e^{2x}\cos x$$

så läses det andra kravet så här

$$0 = C_1 + 3C_2 - \frac{1}{2}$$

De bägge villkoren tillsammans ger $C_1 = -\frac{1}{4}$ och $C_2 = \frac{1}{4}$. Således, den sökta lösningen är

$$y = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

3. Enligt rörformeln (sid. 323) blir den sökta volymen

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^1 x\frac{1}{x+1}\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = 2\pi\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= 2\pi\left[x - \ln|x+1|\right]_0^1 = 2\pi(1-\ln 2). \end{aligned}$$

4. Vi sätter igång uträkningen genom att först kvadratkomplettera det som står under rottecknet. Vi får att

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -((x-2)^2 - 4) = 4 - (x-2)^2$$

Således

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx &= \int \frac{2x+1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}}\,dx = \\ &= \left[\frac{x}{2} - 1 = t \Rightarrow x = 2t+2, dx = 2dt\right] = \int \frac{4t+5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \\ &= -2\int \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + 5\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -2I + 5\arcsin t + C_1 \end{aligned}$$

där

$$I = \int \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[1 - t^2 = u \Rightarrow -2tdt = du\right] = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C_2 = 2\sqrt{1-t^2} + C_2$$

Det betyder att

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx &= -4\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2} + 5\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right) + C = \\ &= -2\sqrt{4x-x^2} + 5\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right) + C \end{aligned}$$

5. a) $O(x^n) = x^n b(x)$ där b är en funktion som är begränsad nära origo. Detta ger

$$O(x^n) + O(x^m) = x^n b_1(x) + x^m b_2(x) = x^n(b_1(x) + x^{m-n} b_2(x))$$

där b_1 och b_2 är två (oftast olika) funktioner begränsade i närheten av origo. Eftersom vi antog att $n \leq m$ så är $m - n \geq 0$ och således är koefficienten vid x^n på HL en funktion som också är begränsad nära origo, vilket skulle visas.

b) Vi använder oss av elementära Maclaurinutvecklingar. Vi börjar med i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4))}{x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + O(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} + O(x^2)\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Vi fortsätter med ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x + O(x^2) - 1}{2x + O(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + O(x)}{2 + O(x)} = 1$$

6. a) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x & \text{för } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

är ≥ 0 förutsatt att $a > 0$ så den är en täthetsfunktion så snart $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = 2a\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = 2a\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a}{2}$$

så att a måste väljas som $a = \frac{2}{\pi}$.

b) $E(X) = 0$ ty f är en jämn funktion. Vi har ju, enligt definitionen av $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos^2 x\,dx = 0$$

ty integranden är en udda funktion på intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$och därför att detta integrationsintervall har mittpunkten i origo.

c) Vidare

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

7. a) Se Sats 6.5, sid. 283.

b) Integralen kan givetvis uttryckas i elementära funktioner men poängen här är att använda medelvärdessatsen för integraler - det blir så mycket enklare. Enligt denna sats

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{\xi^3+\xi^2+\xi+1} \text{ för något } \xi \in [0,1].$$

Men HL är en avtagande funktion som är således som störst vid $\xi = 1$ (är lika med $1/4$ då) och som minst vid $\xi = 2$ (är lika med $1/15$ då), därav följer påståendet.