Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)
2004-10-18 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Efter faktorisering (!) får vi att

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(3x-1)(x+2)}{(4x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{3x-1}{4x+1}=\frac{3(-2)-1}{4(-2)+1}=\frac{-7}{-7}=1.$$

b) Även här har vi $\left[\frac{0}{0}\right]$ situationen. Den här gången klarar vi oss på en sekund:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{2x}{\sin(2x)}=\frac{2}{3},$$

ty $\frac{2x}{\sin(2x)}\to 1$ då $x\to 0$ (standardgränsvärde).

c) ($\left[\frac{0}{0}\right]$ igen) Vi förlänger både täljaren och nämnaren med motsvarande konjugatuttryck och får

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\left(\sqrt{x^2+25}-5\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+25}+5\right)}{\left(\sqrt{x^2+25}+5\right)}\right]= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+25}+5\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+25}+5}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{5+5}{1+1}=5.\end{aligned}$$

2. Beräkna $f'(4)$ för $f(x)=2x^2-3x+7$ **direkt ur derivatans definition**.
   Vi har naturligtvis att

$$\begin{aligned}f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\,(4+h)^2-3(4+h)+7-(2\cdot 4^2-3\cdot 4+7)}{h}= \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{13h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(13+2h)=13.\end{aligned}$$

   Det kan lätt kontrolleras ty vi vet att $f'(x)=4x-3$ så att $f'(4)=4\cdot 4-3=13$.

3. a) Funktionen $f: D_f\to\mathbf{R}$ är kontinuerlig i punkten $a\in D_f$ om

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

b) Enligt a) måste b väljas så att $b \equiv f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Men

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 1+\cos 0 = 2.\end{aligned}$$

Således, vi måste välja $b = 2$ för att göra funktionen f kontinuerlig i 0.

4. Eftersom

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

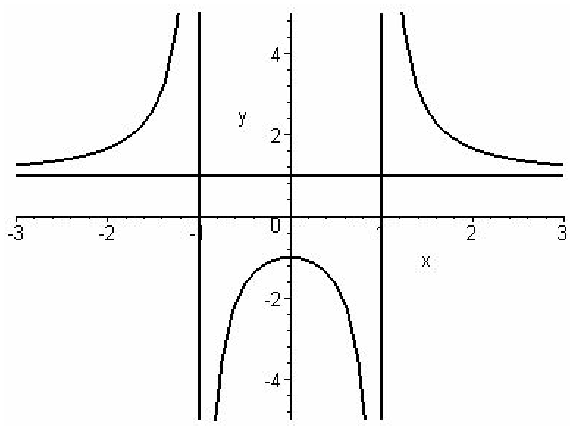
kan vi konstatera att definitionsmängden D_f består av alla reella tal utom $x = -1$ och $x = 1$ ("två hål i D_f"). Funktionen har inga nollställen, ty $x^2 + 1$ är alltid större än noll. Vidare, vi har två vertikala asymptoter: $x = -1$ och $x = 1$. T.ex. vi ser lätt att $\lim_{x\to 1_+} f(x) = +\infty$ medan $\lim_{x\to 1_-} f(x) = -\infty$. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ ser vi att $y = 1$ är en horisontell asymptot både för $x \to +\infty$ och för $x \to -\infty$. Detta medför att sneda asymptoter saknas. Dessutom, efter enkla beräkningar

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Vi ser att det finns en stationär punkt: $x = 0$ samt att singulära punkter saknas. Vi kan även beräkna f'':

$$f''(x) = 4\frac{1+3x^2}{(x^2-1)^3}$$

och eftersom $1 + 3x^2 > 0$ inga inflektionspunkter förekommer. Vi ser dock från f''s nämnare att för $x \in \,]-1, 1[$ funktionen är konkav och att den f.ö. är konvex. Teckentabellen (gör den!) och asymptoter mm (se ovan) medför att funktionen ser som på figur nedanför (här ritat tillsammans med asymptoter $x = \pm 1$ och $y = 1$).



5. Om vi skriver om alla faktorer i z på en polär form får vi att

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4} \cdot 2e^{i\pi/3}}{3e^{i\pi/2} \cdot 2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi(1/4+1/3-1/2-(-1/6))} = \frac{2^{1/2}}{3}e^{i\pi/4}.$$

Således

$$z^{70} = \left(\frac{2^{1/2}}{3}\right)^{70} e^{i\cdot 70\cdot\pi/4} = \frac{2^{35}}{3^{70}}e^{i\pi\cdot(18-1/2)} = -i\cdot\frac{2^{35}}{3^{70}},$$

ty $e^{i\pi\cdot(18-1/2)} = e^{i\pi\cdot 18}e^{-i\pi/2} = 1\cdot e^{-i\pi/2} = -i$.

6. a) Se boken, sid. 187.

b) Enligt kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \\ &= \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(kan du tolka resultatet?). Vidare, eftersom $a^b = e^{b\ln a}$ får vi enligt kedjeregeln

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)' = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

7. Vi har att $f'(x) = 3x^2 + 18x + 27 = 3(x+3)^2$ vilket är större än noll förutom i $x = -3$. Det betyder att f är strängt växande och har då invers. Vidare, eftersom $-9 = f(-1)$ får vi enligt satsen om derivatan av inversa funktionen och beräkningen ovan:

$$\left(f^{-1}\right)'(-9) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3(-1+3)^2} = \frac{1}{12}.$$