Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för kontrollskrivningen i analys TNIU 70
2004-10-01 kl. 08.00—10.00

1. a) Vi ser at gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Faktorsatsen (!) säger då att vi kan faktorisera bort faktorn $x-2$ både ur täljaren och nämnaren. En enkel räkning leder till att $3x^2-5x-2 = 3(x-2)(x+\frac{1}{3})$ medan $5x^2-20 = 5(x-2)(x+2)$. Således

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20} &= \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{5(x-2)(x+2)} = [(x-2) \text{ förkortas ty } x-2\neq 0] \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = \frac{3(2+\frac{1}{3})}{5(2+2)} = \frac{7}{20}\end{aligned}$$

b) Termen x^2 dominerar nämnaren då $x\to\infty$ och således

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{5-\frac{20}{x^2}} = \frac{3}{5}$$

2. Vi observerar först att $x\geq 0$, annars $\sqrt{x}$ är ej definierad. Vi vet också att $\arcsin(t)=\pi/3$ enbart för $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ vilket ger att $x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$. Om du löser uppgiften genom att tillämpa sin funktionen till båda led måste du först lägga till villkoret att $\sqrt{x}\in[-1,1]$, dvs att $x\in[0,1]$.

3. a) En funktion $f : D_f \to \mathbf{R}$ har en invers precis då den är injektiv, dvs. då för *varje par* av olika punkter x_1, x_2 har vi att $f(x_1)\neq f(x_2)$. Det händer t.ex. om f är strängt växande eller strängt avtagande.

   b) Funktionen $f(x)=x^3+3x$ med $D_f=\mathbf{R}$ är omvändbar ty den är injektiv. För att se detta, anta motsatsen, dvs. anta att det finns två *olika* punkter x_1, x_2 sådana att $f(x_1)=f(x_2)$. Vi har alltså att $x_1^3+3x_1 = x_2^3+3x_2$, dvs $x_1^3-x_2^3+3(x_1-x_2)=0$, dvs $(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+3(x_1-x_2)=0$, dvs $(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3)=0$ dvs $(x_1-x_2)\left[(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2+3\right]=0$, vilket kan hända endast om $x_1=x_2$. Vi fick alltså en *motsägelse* (genom att utgå från att $x_1\neq x_2$ har vi visat att $x_1=x_2$). Den enda utvägen ur detta logiska deadlock är då att antagandet är omöjligt.

   Alternativt, vi kan visa att f är strängt växande, dvs. att om $x_1<x_2$ då har vi att $f(x_1)<f(x_2)$. Men det är ju trivialt ty om $x_1<x_2$ så är $x_1^3<x_2^3$ (varför?) så att $x_1^3+3x_1<x_2^3+3x_2$.

   Alternativt, vi kan visa att f är strängt växande genom att inse att $f'=3x^2+3>0$ för alla reella x.

Inversen kan ej beräknas med de metoder vi lärt oss på kursen (det är möjligt dock). Vidare, $V_{f^{-1}} = D_f = \mathbf{R}$ och $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbf{R}$ ty

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

och f är kontinuerlig och alltså antar alla värden mellan $-\infty$ och ∞.

4. a) Se boken, sid. 177.

b) Enligt definitionen av derivata på sid. 177 har vi (tänk på elefanter!)

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(2+h)+1}{(2+h)-1} - \frac{2+1}{2-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3+h}{1+h} - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3+h-3-3h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{1+h} = -2. \end{aligned}$$

Vi kan övertyga oss om att vi räknat rätt genom att beräkna $f'(x)$ på ett standard sätt:

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2},$$

så att $f'(2) = -2/(2-1)^2 = -2$, OK.

c) Tangenten skall passera genom punkten $(2, f(2))$ dvs $(2,3)$. Den skall även ha riktningskoefficienten $= f'(2) = -2$ (se upp. b)). Således måste tangentens ekvation bli:

$$y - 3 = -2(x-2)$$

eller $y = -2x + 7$. Rita motsvarande figur!