Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för kontrollskrivningen 2 i evnariabelanalys TNIU 70
2004-11-19 kl. 08.00—10.00

1. a) En funktion F kallas primitiv till funktionen f på intervallet I om $F' = f$ på I.

   b) Två enkla substitutioner hjälper oss att räkna ut den första integralen:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx &= [y = \sin x,\ \cos x\, dx = dy] = \int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = [t = 1+y,\, dt = dy] = \\ &= \int t^{-1/2}dt = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1+y} + C = 2\sqrt{1+\sin x} + C.\end{aligned}$$

   Den andra integralen löses med hjälp av partiell integration:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln x\, dx &= \left[f(x) = \sqrt{x},\, F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2},\, g(x) = \ln x,\, g'(x) = \frac{1}{x}\right] \overset{P.I.}{=} \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

2. Integranden är en rationell funktion. Steg 1 behövs ej. Nämnaren faktoriseras enligt följande: $3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$ så att partialbråksuppdelningen måste ha formen

$$\frac{11x-1}{3x^2-5x-2} = \frac{11x-1}{(3x+1)(x-2)} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

   Enkel beräkning leder till attt $A = 2$ och $B = 3$ så att

$$\frac{11x-1}{3x^2-5x-2} = \frac{2}{3x+1} + \frac{3}{x-2}.$$

   Således

$$\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2}\,dx = 2\int\frac{dx}{3x+1} + 3\int\frac{dx}{x-2} = \frac{2}{3}\ln|3x+1| + 3\ln|x-2| + C,$$

(kontrollera resultatet!).

3. a) Se boken, sid. 290.

b) Om vi betecknar

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

(försök inte att räkna ut denna integral. Det är den så kallade sinus integral funktionen Si(x) - en ny funktion ni känner inte till) då har vi enligt satsen i a)

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

(obs att x är ju bara en elefant här!) och således, enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x^3)\right) \overset{\text{kedjeregeln}}{=} F'(x^3) \cdot 3x^2 \overset{\text{a)}}{=} \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot 3x^2 = 3\frac{\sin(x^3)}{x}.$$

4. a) Se boken, sid. 327 och 328.

b) Enligt a) har vi att volymen av den rotationskropp som uppstår blir

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = [\text{enkel partiell integration}] = 2\pi \cdot [\sin x - x\cos x]_0^\pi = 2\pi^2.$$