Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)
2004-12-16 kl. 08.00—13.00

1. a) Taylorpolynomet av ordning n för en n-gånger deriverbar funktion f kring (i närheten av) punkten a defineras genom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

b) Vi kan antingen använda definitionen ovan eller räkna ut Taylorpolynomet genom att tillämpa den kända Maclaurinutvecklingen för $\ln(1+x)$ på följande sätt:

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(2+(x-2)) = \ln\left(2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln(1+u) \\ &= \ln 2 + u - \frac{u^2}{2} + O(u^3) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + O((x-2)^3).\end{aligned}$$

Ur detta följer att det sökta Taylorpolynomet blir $p_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2$.

c) Eftersom $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)$ får vi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\cos(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+O(x^6)\right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+O(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+O(x^2)\right) = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

2. a) Integrerande faktor för den linjära diffekvationen av 1:a ordningen $y' + f(x)y = g(x)$ definieras som

$$e^{\pm F(x)}$$

där F är en primitiv funktion till funktionen f.

b) Vi måste först dela ekvationen med $1+x^2$. Vi får

$$y' + \frac{1}{1+x^2}y = \frac{2}{1+x^2}, \tag{1}$$

så att integrerande faktor blir

$$h(x) = e^{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx} = e^{\arctan(x)}.$$

Vi multiplicerar ekvationen (1) med $h(x)$ och konstaterar att VL har formen av en derivata av en funktion. Nämligen, vi får

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{\arctan(x)}\right) = \frac{2\cdot e^{\arctan(x)}}{1+x^2},$$

så att

$$\begin{aligned} y\cdot e^{\arctan(x)} &= 2\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}dx = \left[y=\arctan(x),\, dy = \frac{dx}{1+x^2}\right] = 2\int e^y dy = 2e^y + C = \\ &= 2e^{\arctan(x)} + C. \end{aligned}$$

Således, den allmänna lösningen för (1) blir

$$y(x) = 2 + C\, e^{-\arctan(x)}.$$

Det återstår att fånga upp den lösning som uppfyller kravet ovan. Vi vet att $\arctan(x) \to \pi/2$ då $x \to \infty$ så att

$$3 = \lim_{x\to\infty} y(x) = 2 + Ce^{-\pi/2},$$

så att $C = e^{\pi/2}$. Vi erhåller alltså att den sökta lösningen blir

$$y(x) = 2 + e^{\pi/2-\arctan(x)}.$$

3. Den homogena lösningen får vi genom att lösa karakteristiska ekvationen $r^2+r-2=0$, vilket ger $r_1=-2$, $r_2=1$ och således

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x.$$

Vi letar nu efter en partikulär lösning y_{p_1} för "den första halvan" av hela ekvationen, dvs för $y''+y'-2y=x$. Ansatsen blir $y_{p_1} = Ax+B$ vilket insatt i ekvationen leder snabbt till att $y_{p_1} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Det återstår nu att lösa "den andra halvan" av ekvationen, dvs $y''+y'-2y = 2\sin(x)$. Ansatsen som funkar är $y_{p_2} = A\sin(x) + B\cos(x)$, vilket insatt i ekvationen ger, efter enkla omskrivningar

$$(-3A-B)\sin(x) + (A-3B)\cos(x) = 2\sin(x).$$

Den sista ekvationen skall vara uppfylld för samtliga x dvs den måste vara identitet. Detta kan hända enbart om $-3A-B=2$ och $A-3B=0$. Detta ekvationssystem har lösningen $A=-3/5$ och $B=-1/5$. Således,

$$y_{p_2} = -\frac{3}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)$$

och den allmänna lösningen för den ursprungliga, icke-homogena ekvationen, antar formen

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \\ &= C_1e^{-2x} + C_2\, e^x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{5}\sin(x) - \tfrac{1}{5}\cos(x). \end{aligned}$$

4. a) Kolla boken den här gången.

b) Variabelbytet $y=\sin(x)$ förvandlar vår integral till en rationell integral:

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2(x) + \sin(x) - 6}dx = [y = \sin x,\ \cos x\, dx = dy] = \int \frac{y}{y^2+y-6}dy.$$

Vi måste alltså partiellbråksuppdela den sista integranden. Det är enkelt och leder till

$$\frac{y}{y^2+y-6} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{y+3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{y-2},$$

så att

$$\int \frac{y}{y^2+y-6}dy = \frac{3}{5}\ln|y+3| + \frac{2}{5}\ln|y-2| + C,$$

och slutligen

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin^2(x)+\sin(x)-6}dx &= \frac{3}{5}\ln|\sin x+3| + \frac{2}{5}\ln|\sin x-2| + C = \\ &= \frac{3}{5}\ln(\sin x+3) + \frac{2}{5}\ln(2-\sin x) + C.\end{aligned}$$

Det sista steget gäller ty sin ligger mellan -1 och 1 så att $\sin x + 3$ är alltid positiv medan $\sin x - 2$ är alltid negativ.

5. Eftersom $f'(x) = \ln(x) + 1$ kan man lätt räkna sig fram till (teckenstudium!) att $a = \frac{1}{e}$ är en lokall (och absolut) minimipunkt. Detta ger att den sökta volymen blir

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{1/e}^{1} (x\ln(x))^2\,dx = [\text{partiell integration två gånger, derivera } \ln(x)\text{-termerna}] = \\ &= \pi\left[\frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3\right]_{x=1/e}^{x=1} = \frac{\pi}{27}\left(2-17e^{-3}\right).\end{aligned}$$

Det är också bra att kunna rita funktionen f. För dem som är nyfikna:

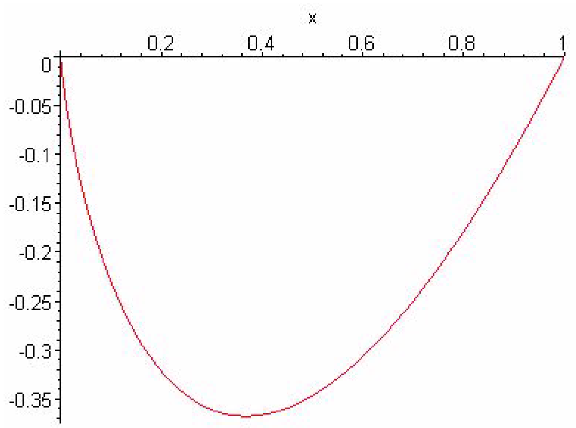

Figure 1:

6. Bägge integraler är generaliserade. Den första integralen är generaliserad i ∞ så att

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x} &= \lim_{R\to\infty}\int_e^R \frac{dx}{x\ln x} = \left[y=\ln x,\ \frac{dx}{x}=dy,\ x=e\Rightarrow y=1,\ x=R\Rightarrow y=\ln(R)\right] = \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_1^{\ln(R)} \frac{dy}{y} = \lim_{R\to\infty}[\ln y]_1^{\ln(R)} = \lim_{R\to\infty}(\ln(\ln R)-0)=\infty,\end{aligned}$$

så att den är divergent. Den andra integralen är generaliserad i 1 och således

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}} &= \lim_{c\to 1_-}\int_0^c \frac{dx}{(1-x)^{1/3}} = \lim_{c\to 1_-}\left[-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\right]_{x=0}^{x=c} = \\ &= \lim_{c\to 1_-}\left(-\frac{3}{2}(1-c)^{2/3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

dvs integralen konvergerar mot 3/2.

7. Om F är en primitiv funktion till f på intervallet I så gäller att

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a).$$

för alla $a, b \in I$.

Låt F beteckna nu en primitiv till $f(t)=1/(1-t^2)$ (vi behöver inte beräkna den. Det räcker att vi vet att $F' = f$). Enligt insättningsformeln

$$\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{1-t^2}dt = F(\cos x) - F(\sin x)$$

vilket ger (kedjeregeln!):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{1-t^2}dt &= F'(\cos x)(-\sin x) - F'(\sin x)\cos x = \\ &= -\frac{\sin x}{1-\cos^2 x} - \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{\sin x}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \\ &= -\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right).\end{aligned}$$