Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)
2005-01-08 kl. 08.00—13.00

1. a) Ekvationen

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

ger (t.ex. via enhetscirkeln) att $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ eller $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2n\pi$ vilket ger $x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ eller $x=\pi+2n\pi=(2n+1)\pi$.

b) Vi kan antingen lösa olikheten på ett klassiskt sätt (genom att dela upp den reella axeln i tre områden etc.) eller genom att tolka beloppet som avstånd mellan punkterna. Problemet kan således formuleras så här: vilka punkter på den reella axeln $\mathbf{R}$ ligger närmare punkten 3 än punkten -1? Svaret är förstås: de som uppfyller kravet $x>1$.

c) Ekvationen är definierad enbart för $x>0$ och kan skrivas som $e^3\cdot x^{-\ln x}=e$. Logaritmering ger $3+(-\ln x)\cdot\ln x=1$ dvs $(\ln x)^2=2$. Detta ger $\ln x=\pm\sqrt{2}$. Således, ekvationen har två lösningar: $x=e^{\sqrt{2}}$ och $x=e^{-\sqrt{2}}$.

2. a) Polynomet x^4+3x^2-4 kan lätt faktoriseras tack vare faktum att det har bara jämna potenser av x. Vi får

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4+3x^2-4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x^2+4)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-1)(x^2+4)=-2\cdot5=-10.$$

b) Eftersom $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ och $\tan x=\sin x/\cos x$, vi får

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot2\sin(x)\cdot\cos(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos^2(x)}=\frac{1}{2}.$$

c) Detta gränsvärde beräknar vi genom att förlänga både nämnaren och täljaren med ett uttryck konjugerat till uttrycket i parentes:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=0.\end{aligned}$$

Resultatet är rimligt ty för väldigt stora x är de båda rötterna i det närmaste lika.

3. a) Funktionen $f : D_f \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt $a \in D_f$ dvs om i varje $a \in D_f$ gäller att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   b) Den enda punkten som ställer till problem är förstås $a = 0$. Funktionen blir kontinuerlig i 0 (och således överallt) om villkoret i a) är uppfylld där. Men

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Således, vi måste välja $a = 1/2$ för att göra funktionen f kontinuerlig.

4. Vi konstaterar först att $D_f = \mathbf{R} - \{2\}$ och att funktionens nollställen är $\pm\sqrt{3}$. Vi ser lätt att $\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \mp\infty$ så att linjen $x = 2$ är en vertikal asymptot. Vidare, $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$ så att horisontella asymptoter saknas. Vi undersöker nu om det finns sneda asymptoter. Vi har att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3/x}{x-2} = 1$. Dessutom,

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3-x\cdot(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2,$$

   så att $y = x + 2$ är en sned asymptot då $x \to \infty$. På samma sätt kan vi visa att $y = x + 2$ är en sned asymptot även då $x \to -\infty$. Vidare, derivatan av f har formen

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

   så att funktionen är växande för $x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$ och avtagande för $x \in]1, 2[\cup]2, 3[$ (för $x = 2$ är den ej definierat). Funktionen har således en lokall maximipunkt vid $x = 1$ och en lokall minimipunkt för $x = 3$. Vidare, andra derivatan f'' har formen

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3},$$

   så att funktionen är konvex för $x > 2$ och konkav för $x < 2$ (gör en ordentlig teckentabell!). Punkten $x = 2$ är dock ingen inflektionspunkt eftersom $2 \notin D_f$. Vi konstaterar att funktionen måste se ut som på figuren 1 (här ritat även med de bägge asymptoterna).

5. a) Se boken.

   b) Eftersom

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-4}{x^3}$$

   så är riktningskoefficienten för den sökta linjen $y = kx + m$ lika med $k = f'(2) = -1/\sqrt{3}$. Eftersom linjen går genom punkten $(2, f(2)) = (2, \arcsin(1/2)) = (2, \pi/6)$ så blir m lika med $m = \pi/6 - \left(-1/\sqrt{3}\right) \cdot 2 = \pi/6 + 2/\sqrt{3}$. Således, den sökta linjen blir

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

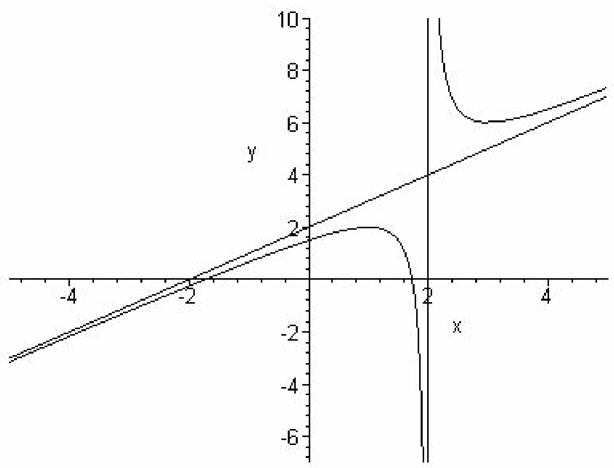

Figure 1:

6. Uppgiften är elementär och lyder egentligen så här: vilka komplexa tal som ligger på samma avstånd från talet i som från talet $-i$? Svaret är enkelt: alla (och enbart sådana) som ligger på den reella axeln $\text{Im}(z) = 0$. Men om man vill räkna sig fram till detta svar så kan man använda följande resonemang: om vi skriver z som $z = x + iy$ där x och y är reella så kan vi skriva om ekvationen $|z + i| = |z - i|$ som (Pythagoras!)

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2},$$

vilket efter kvadrering (inga falska rötter tillförs) ger $x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$. Förenklar vi detta så får vi till sist ekvationen $y = 0$ som är uppfylld, som sagt, av alla komplexa tal med $\text{Im}(z) = 0$, dvs av alla reella tal.

7. $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ så att f är strängt växande och har således invers. Den kan vi inte beräkna explicit, men vi kan ändå beräkna $\left(f^{-1}\right)'(35)$ genom att tillämpa satsen om derivatan av invers funktion. Eftersom $35 = f(2)$ så har vi enligt denna sats

$$\left(f^{-1}\right)'(35) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \frac{1}{81}.$$