Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)
2005-03-29 kl. 8.00—13.00

1. Ekvationen kan lösas med hjälp av integrerande faktor, som för denna ekvation är

$$h(x) = \pm \exp\left(\int \frac{x}{1+x^2}dx\right) = \pm e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \pm\sqrt{1+x^2}.$$

(vi väljer +). Efter ledvis multiplikation med $h(x)$ antar ekvationen formen

$$\frac{d}{dx}\left(y\sqrt{1+x^2}\right) = \sin x,$$

så att

$$\left(y\sqrt{1+x^2}\right) = -\cos x + C$$

och således lösningen blir

$$y(x) = \frac{C - \cos x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. a) Se boken.

b) Enligt Taylorsatsen (elementära utvecklingar)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \sin x}{x^3\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - x^3/3 + O(x^5) - \left(x - x^3/6 + O(x^5)\right)}{x^3(1+O(x^2))} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x^3/6 + O(x^5)}{x^3(1+O(x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{-1/6 + O(x^2)}{1+O(x^2)} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Vidare, om vi sätter $t = -1/x^2$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1) &= \lim_{t\to 0^-}\frac{1-e^t}{t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{1 - \left(1 + t + O(t^2)\right)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{-t + O(t^2)}{t} = -1.\end{aligned}$$

3. Arean ges naturligtvis (rita figuren) av den generaliserade integralen:

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2(x+1)}dx.$$

Integranden är en rationell funktion som har följande partiellbråksuppdelning:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

med primitiva funktioner

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{x} + \ln \frac{x+1}{x} + C.$$

Således,

$$I = \lim_{R \to \infty} \left[-\frac{1}{x} + \ln \frac{x+1}{x} \right]_1^R = \lim_{R \to \infty} \left[\ln \frac{R+1}{R} - \frac{1}{R} - \ln 2 + 1 \right] = 1 - \ln 2.$$

4. Vi ser att den homogena delen av ekvationen har karakteristisk ekvation med en dubbelrot $r = -2$. Den måste alltså ha formen $(r+2)^2 = 0$, eller $r^2 + 4r + 4 = 0$. Alltså, den homogena delen av ekvationen har formen $y'' + 4y' + 4y = 0$ (eller varje multipel av denna). Den icke-homogena delen får vi om vi sätter in uttrycket $3\cos(x) + 4\sin(x)$ i den homogena ekvationen, dvs. om vi antar att $y_p = 3\cos x + 4\sin x$ (varför?). Vi får snabbt att

$$y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 25\cos x.$$

Ekvationen blir således

$$y'' + 4y' + 4y = 25\cos x$$

(eller varje nollskild multipel av denna).

5. Den allmänna lösningen till DE $y''+2y'+2y = 0$ får vi på ett sedvanligt sätt (via karakteristisk ekvation). Den är

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Kraven $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ leder till $C_1 = C_2 = 1$ vilket ger att det område som skall roteras begränsas av grafen till

$$y(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

samt av $x = \pi/2$ och $y = 0$. Volymen som uppstår blir, enligt en välkänd formel, lika med

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/2} y^2(x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} e^{-2x}(\cos x + \sin x)^2\, dx = \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} e^{-2x}(1 + \sin 2x)\, dx = \pi \left[-\frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}(\sin 2x + \cos 2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\left(3 - e^{-\pi}\right), \end{aligned}$$

där vi kan utnyttja partiell integration eller Eulerformler för att beräkna $\int e^{-2x}(1+\sin 2x)\, dx$.

6. a) En kurva som i polära koordinater ges av $r = h(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ har längden

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{h^2(\varphi) + (h'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Denna formel kan lätt härledas (se boken, sid. 325).

b) Tillämpningen av den ovanstående formeln ger

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_0^1 \sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi = \\ &= a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_0^1 = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right), \end{aligned}$$

där integralen $\int \sqrt{x^2+1}dx$ räknas på ett sedvanligt sätt (se boken).

7. a) Se boken, sid. 288.

b) Jag hoppas att ni inte försökte räkna ut integralen $\int \sqrt{1+t^4}\, dt$. Det är en s.k. elliptisk integral som inte kan uttryckas med hjälp av funktioner vi känner till. Vi kan dock använda satsen ur a). Enligt denna sats finns det ett tal $\xi \in [0, x]$ sådant att $\int_0^x \sqrt{1+t^4}\, dt = (x - 0)\sqrt{1+\xi^4}$. Således,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\xi^4}}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{\xi^4}{x^4}} = 0,$$

eftersom uttrycket under rottecknet är begränsat ty $0 \le \left(\frac{\xi}{x}\right)^4 \le 1$.