Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)

2005-08-10 kl. 14:00—19:00

1. Olikheten
$$r(x) \equiv \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x - 3} \leq 0.$$
är definierad för alla $x \neq 3$. Täljaren kan lätt faktoriseras (via faktorsatsen - t.ex. $x = 1$ är en av täljarens rötter):
$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x + 1)(x + 3).$$
Om vi sätter nu upp en teckentabell

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$x-1$	$-$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$
$x+1$	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	3	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	2	$+$	4	$+$	6	$+$
$x-3$	$-$	-6	$-$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$
$r(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def	$+$

(kom ihåg att $x = 3$ tillhör ej lösningsmängden) konstaterar vi lätt att lösningen blir samtliga x som uppfyller villkoret
$$x \in [-3, -1] \cup [1, 3).$$
dvs
$$-3 \leq x \leq -1 \text{ eller } 1 \leq x < 3.$$

2. Derivatan är
$$y'(x) = \frac{2}{1 + x^2},$$
och de sökta punkterna måste uppfylla ekvationen $y'(x) = 1$, vilket genast ger $x = 1$ eller $x = -1$. Det finns alltså två punkter på grafen där tangenten till grafen har riktningskoefficient 1: $P_1 = (1, 2\arctan 1) = (1, \pi/2)$ och $P_2 = (-1, 2\arctan(-1)) = (-1, -\pi/2)$. Tangenten l_1 genom P_1 blir $y = x + \pi/2 - 1$ medan tangenten l_2 genom P_2 är $y = x - \pi/2 + 1$. l_1 skär x-axeln i punkten $(1 - \pi/2, 0)$ och y-axeln i $(0, \pi/2 - 1)$ medan l_2 skär x-axeln i $(\pi/2 - 1, 0)$ och y-axeln i $(0, 1 - \pi/2)$. Allt enligt elementära beräkningar.

3. a) Se boken sid. 180.

   b) T.ex. $f(x) = |x|$ är kontinuerlig överallt, och alltså även i $x = 0$ men den är ej deriverbar i $x = 0$.

4. Definitionsmängden för f är alla reella tal utom $x = 3$ och $x = -3$. Vi ser att $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$, vilket medför att den lodrata linjen $x = 3$ är en vertikal asymptot. Vidare: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$ vilket visar att även $x = -3$ är en vertikal asymptot. Dessutom ser vi att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ (obs teckenuppsättning) vilket medför att horisontella asymptoter saknas. Hur är det då med sneda asymptoter? Vi börjar med att räkna ut k (riktningskoefficient) för den tänkbara sneda asymptoten i $+\infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = -1.$$

Den existerar, så vi kan fortsätta med att räkna m:

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{9 - x^2} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 9x - x^3}{9 - x^2} = 0.$$

Således, $y = -x$ är en sned asymptot vid $+\infty$. Genom att beräkna ovanstående gränser när $x \to -\infty$ ser vi att $y = -x$ är även sned asymptot vid $-\infty$. Det är nu dags att beräkna derivatan $f'(x)$ (och även $f''(x)$ om vi vill veta konvexiteten av f). Efter några beräkningar får vi

$$f'(x) = \frac{x^2(27 - x^2)}{(9 - x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{18x(x^2 + 27)}{(9 - x^2)^3}.$$

Stationära punkter får vi om vi löser ekvationen $f'(x) = 0$, vilket ger $x = -\sqrt{27} = -3\sqrt{3}$, $x = 0$ samt $x = 3\sqrt{3}$. Vi ser dessutom att $f''(x) = 0$ enbart för $x = 0$. Teckenstudium (gör det och glöm ej att $\pm 3 \notin D_f$) leder till att

- f är växande för $-3\sqrt{3} < x < -3$, $-3 < x < 3$ samt $3 < x < 3\sqrt{3}$ och avtagande annars.
- $x = -3\sqrt{3}$ är lokal minimipunkt med $f(-3\sqrt{3}) = 9\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ är en terasspunkt med $f(0) = 0$ medan $x = 3\sqrt{3}$ är en lokal maximipunkt med $f(3\sqrt{3}) = -9\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- f är konvex för $x < -3$ samt för $0 < x < 3$ och konkav annars.
- $x = 0$ är en enda inflektionspunkt.

  Vi kan alltså konstatera att funktionens graf ser ut som på Fig. 1 (ritat även med alla asymptoter).

5. Lådans volym blir (ser du det?)

$$V(a) = a(2b - 2a)(3b - 2a) = 6ab^2 - 10ba^2 + 4a^3,$$

där $a \in [0, b]$ (varför?). Eftersom V är deriverbar på hela definitionsmängden $[0, b]$ vet vi att V antar sitt största värde och att det inträffar vid definitionsmängdens ändpunkter eller vid stationära punkter. Vi har dock att $V(0) = V(b) = 0$. Vi kollar lätt att $V'(a) = 12a^2 - 20ab + 6b^2$ och får att $V'(a) = 0$ om och endast om

$$a = a_1 = \frac{b}{6}\left(5 - \sqrt{7}\right) \text{ eller } a = a_2 = \frac{b}{6}\left(5 + \sqrt{7}\right).$$

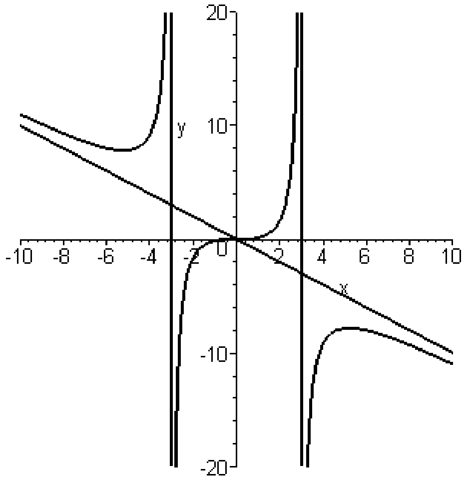

Figure 1:

Den andra lösningen ligger dock utanför definitionsmängden. Således, den enda stationära punkten är

$$a = a_1 = \frac{b}{6}\left(5 - \sqrt{7}\right).$$

Naturligtvis, $V(a_1) > 0$ och således V antar sitt största värde där. Vi kan även, efter några enkla beräkningar, bestämma den maximala volymen (det var *inte* en del av uppgiften). Den blir

$$V_{\max} = V(a_1) = \frac{b^3}{27}\left(10 + 7\sqrt{7}\right) \approx 1.06\, b^3.$$

6. Om $z = x + iy$ då har vi $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$, och således villkoret $\mathrm{Im}(z^2) = r$ blir $2xy = r$, dvs $y = \frac{r}{2x}$ (en hyperbel, ungefär som på Fig. 2.9 (a) sid. 71).

7. a) Se boken, sid. 68.

   b) Genom att utnyttja sammansättningens definition kommer vi fram till att

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = \begin{cases} (f(x))^2 & \text{om } f(x) < 3 \\ -f(x) - 2 & \text{om } f(x) \geq 3 \end{cases}.$$

Den första möjligheten ($f(x) < 3$) inträffar dock enligt f:s definition precis då $x \leq 0$ medan den andra möjligheten ($f(x) \geq 3$) inträffar precis då $x > 0$. Således

$$(g \circ f)(x) = g(f(x) = \begin{cases} (f(x))^2 & \text{om } x \leq 0 \\ -f(x) - 2 & \text{om } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \leq 0 \\ -2x - 5 & \text{om } x > 0 \end{cases};$$

den sista likheten följer igen ur f:s definition. Grafen till $g \circ f$ ser således ut som på Fig. 2.

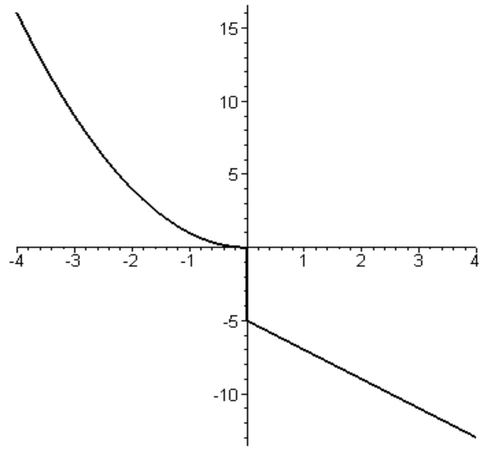

Figure 2: