Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

2005-08-15 kl. 8.00—13.00

1. a) Se boken, sid. 386. (1p)

   b) Ekvationen
$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1$$
   är en linjär, icke-homogen differentialekvation av grad 1 och därför vi kan försöka lösa den med hjälp av integrerande faktor. Den är
$$h(x) = \pm \exp\left(\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx\right) = \pm\, e^{-\ln x} = \pm\, \frac{1}{x}.$$
   (vi kan välja +). Efter ledvis multiplikation med $h(x)$ antar ekvationen formen
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = x + \frac{1}{x},$$
   så att
$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}x^2 + \ln x + C$$
   ($|x|$ behövs ej ty $x > 0$) och således lösningen blir
$$y = x\left(\frac{1}{2}x^2 + \ln x + C\right).$$

2. Den karaktäriska ekvationen $r^2 + r - 6 = 0$ har rötterna $r = 2$ och $r = -3$. Således, den allmänna lösningen av den homogena delen av ekvationen blir
$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$
   En partikulärlösning till hela ekvationen kan hittas via ansatzen $y_p = Ae^{3x}$. Genom att sätta in den i ekvationen hittar vi att $A = 1/6$. Således, den allmänna lösningen för hela ekvationen är
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{3x}.$$
   Kravet "$\lim_{x\to-\infty} y(x)$ finns ändligt" uppfylls om och endast om $C_2 = 0$ (gränsvärdet är då alltid 0). Vi får att alla (och endast dessa) funktioner på formen $y = Ce^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$ (där C är ett godtyckligt reellt tal) löser vårt problem.

3. Enligt en välkänt formel får vi att volymen blir (rita området först!)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2(x)dx = \pi \int_0^1 (\sin x + \cos x)^2 \, dx = \pi \int_0^1 \left(\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x\right) dx = \\ &= \pi \int_0^1 (1 + \sin 2x)\, dx = \pi \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2}(3 - \cos 2)\,. \end{aligned}$$

4. Vi har $y' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ så att

$$1 + \left(y'\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)^2$$

Längden blir således

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right).$$

5. Det är obekvämt att derivera f direkt 5 gånger. Vi vet dock att

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3),$$

så att

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + O(x^6)$$

(eller hur? x^2 är ju 'elefanten' här). Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{1+x^3}{1+x^2} &= \left(1+x^3\right)\frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^3\right)\left(1 - x^2 + x^4 + O(x^6)\right) = \\ &= 1 - x^2 + x^4 + O(x^6) + x^3 - x^5 + x^7 + O(x^9) = \\ &= 1 - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + O(x^6). \end{aligned}$$

Det sökta polynomet är alltså

$$1 - x^2 + x^3 + x^4 - x^5.$$

6. Integranden är en rationell funktion och måste partiellbråksuppdelas först. Det sker enligt följande beräkning:

$$\frac{1}{t^2+2t-3} = \frac{1}{(t-1)(t+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+3}\right).$$

Vi ser här att integralen är **generaliserad** vid $t = 1$. Således

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t^2+2t-3} &= \frac{1}{4}\lim_{h\to 1^+}\int_h^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+3}\right) dt = \frac{1}{4}\lim_{h\to 1^+}\left[\ln(t-1) - \ln(t+3)\right]_h^2 \\ &= \frac{1}{4}\lim_{h\to 1^+}\left(-\ln 5 - \ln(h-1) + \ln(h+3)\right) = \infty \end{aligned}$$

och integralen är alltså divergent till ∞.

7. Se boken, sid. 290-291.