Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för kontrollskrivningen i analys TNIU 70

2005-09-23 kl. 08.00—10.00

1. a) Se boken, sid. 73.

   b) Eftersom $D_f =]-\infty, 0]$ samt $V_f = [0, \infty[$ har vi att $D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty[$ och $V_{f^{-1}} = D_f =]-\infty, 0]$. Således, ur sambandet $y = x^2$ får vi

$$x = -\sqrt{y} = f^{-1}(y)$$

   (obs tecken! - annars skulle $f^{-1}(y)$ vara större än noll, vilket är omöjligt ty $V_{f^{-1}} = D_f =]-\infty, 0]$) och således

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}.$$

   Rita gärna f och f^{-1} så förstår du bättre!

2. Ekvationen

$$\arcsin(x) + \arccos(2x) = \frac{\pi}{6} \tag{1}$$

   har mening för $x \in D_{\text{ekv}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Vi räknar ut sinus av ekvationen (ledvis alltså) och får

$$\sin\left(\arcsin(x) + \arccos(2x)\right) = \frac{1}{2}$$

   eller (additionsformeln, sid. 100)

$$\sin(\arcsin x)\cos(\arccos(2x)) + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos(2x)) = \frac{1}{2}.$$

   Naturligtvis, $\sin(\arcsin x) = x$ och $\cos(\arccos(2x)) = 2x$ för $x \in D_{\text{ekv}}$. Vidare, enligt "trigettan",

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

   Vi vet att $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ så att $\cos(\arcsin x) \geq 0$. Således, $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - x^2}$. På samma sätt visar vi att $\sin(\arccos(2x)) = +\sqrt{1 - 4x^2}$. Ekvationen blir alltså

$$2x^2 + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - 4x^2} = \frac{1}{2}$$

   eller

$$\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - 4x^2} = \frac{1}{2} - 2x^2.$$

   Kvadrerar vi den sista ekvationen (obs: falska rötter kan uppstå) får vi sambandet

$$(1 - x^2)(1 - 4x^2) = \left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)^2$$

vilket blir efter förenkling $x^2 = \frac{1}{4}$. Vi får alltså två kandidater för ekvationens rötter: $x = +\frac{1}{2}$ samt $x = -\frac{1}{2}$. Båda ligger i D_{ekv}. Sätter vi $x = \frac{1}{2}$ i (1) får vi $\arcsin(1/2) + \arccos 1 = \pi/6$ vilket stämmer så att $x = 1/2$ är en rot till (1). Den andra lösningen $x = -1/2$ uppfyller däremot inte ekvationen: $\arcsin(-1/2) + \arccos(-1) = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6 \neq \pi/6$ och är alltså en falsk rot.

3. Gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$$

beräknas genom att förlänga både täljaren och nämnaren med respektive konjugatuttryck. Vi får alltså

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \\
&= \frac{x^2+1-(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-(x+1)} = \\
&= \frac{x^2-x}{-x} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)} = \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)} = \\
&= (1-x) \cdot \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)} \to (1-0) \cdot \frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1 \text{ då } x \to 0.
\end{aligned}$$

4. a) Se boken, sid. 140. (1p)

b) Funktionen är kontinuerlig överallt utom kanske i $x = 5$. Vi har

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10 \neq f(5) = 5.$$

Funktionen är således inte kontinuerlig i $x = 5$ och därmed ej kontinuerlig.