Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)

2005-10-15 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Faktorsatsen (!) ger

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x+\frac{1}{3})(x-2)}{5(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = \frac{3(2+\frac{1}{3})}{5(2+2)} = \frac{7}{20}.$$

b) Även här har vi gränsvärdet av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi får

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(4x)}{\arcsin(5x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan(4x)}{4x}\cdot\frac{5x}{\arcsin(5x)}\cdot\frac{4}{5}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5},$$

ty både $(\arctan u)/u$ och $(\arcsin u)/u$ går mot 1 då $u\to 0$ ($u=4x$ i det första uttrycket och $u=5x$ i det andra uttrycket).

2. a) $f'(a)$ är lutningen av tangenten till grafen av f i punkten $(a, f(a))$.

b) Enligt a) så har den sökta tangenten riktningskoefficienten $k = f'(\ln\pi)$. Men enligt kedjeregeln $f'(x) = \big(1+\tan^2(e^x)\big)\cdot e^x$. Således

$$k = f'(\ln\pi) = \Big(1+\tan^2(e^{\ln\pi})\Big)\cdot e^{\ln\pi} = \pi$$

ty $e^{\ln\pi}=\pi$ och $\tan\pi = 0$. Den sökta tangenten har alltså ekvationen $y=\pi x+m$ där m kan bestämmas genom att sätta in punkten $(\ln\pi, f(\ln\pi)) = (\ln\pi, \tan e^{\ln\pi}) = (\ln\pi, 0)$ i linjens ekvation. Vi får $0=\pi\ln\pi+m$ och således $m=-\pi\ln\pi$. Den sökta ekvationen blir alltså

$$y=\pi(x-\ln\pi).$$

3. Vi inser snabbt att funktionens definitionsmängd blir $D_f = R\setminus\{-1\}$, dvs alla reella x utom $x=-1$. Det finns alltså ett hål, $x=-1$, i funktionens definitionsmängd. Genom att lösa ekvationen $f(x)=0$ visar vi att funktionen har inga nollställen. Vidare,

$$f'(x) = 1+\frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Stationära punkter är alltså $x=1$ och $x=-3$. Dessutom ser vi att $f'>0$ för $x\in\,]-\infty,-3[\,\cup\,]1,\infty[$ (funktionen är alltså strängt växande där) samt att $f'<0$ för $x\in\,]-3,1[$ (funktionen avtar där).Deriverar vi en gång till så får vi

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$$

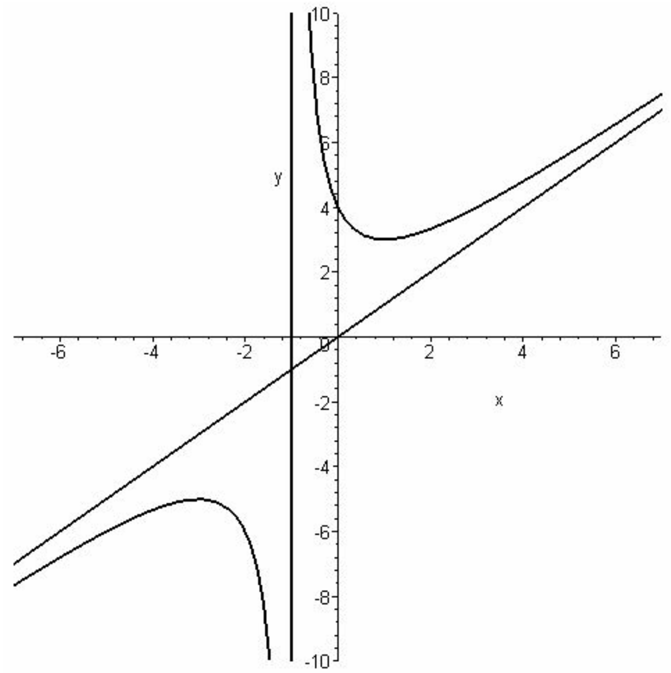

Figure 1:

och vi ser att $f'' \neq 0$ överallt men att $f'' > 0$ för $x > -1$ (funktionen är alltså konvex där) medan $f''(x) < 0$ för $x < -1$ (funktionen är konkav då). Teckentabellen kan du lätt fixa själv nu. Från den framgår det att $x = -3$ är lokallt maximum med $f(-3) = -5$ medan $x = 1$ är lokallt minimum för f med $f(1) = 3$. Vidare

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

så att $x = -1$ är en vertikal asymptot. Dessutom,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

- det finns således inga horisontella asymptotet. Sneda då? Vi räknar först för $+\infty$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x(x+1)}\right) = 1, \\ m &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x+1} = 0. \end{aligned}$$

Således, linjen $y = x$ är funktionens asymptot vid $+\infty$. Pss visar man att samma linje blir funktionens asymptot även vid $-\infty$. Samlar vi allt vi kommit fram till så kan vi rita funktionens graf. Den ser ut som på Figur 1 (som även visar de båda asymptoterna).

4. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{ifall } x \geq 0 \\ Ax + B & \text{ifall } x < 0 \end{cases}$$

måste bli kontinuerlig i 0 för att den skall bli deriverbar där. Eftersom funktionen defineras av två olika uttryck så måste vi först beräkna höger- och vänstergränsvärden.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2+3x+1\right) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (Ax+B) = B.$$

Gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

existerar alltså enbart om $B = 1$ och då är den lika med $f(0) = 1$. Funktionen är alltså kontinuerlig enbart om $B = 1$ Vi räknar nu höger- och vänsterderivata i 0:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+3h}{h} = 3, \\ f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{Ah+B-1}{h} = A \text{ (ty } B=1). \end{aligned}$$

Bägge derivator är lika enbart om $A = 3$ och då existerar naturligtvis derivatan i 0 och är lika med 3. Svaret är naturligt - varför?

5. Uppgiften är elementär: eftersom $|z| = \sqrt{2}$ har z följande polär form: $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Således

$$z^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30} e^{30i\pi/4} = 2^{15} e^{(6+\frac{3}{2})i\pi} = 2^{15} e^{\frac{3}{2}i\pi} = -2^{15} i.$$

6. Vi vet att $f_{\max}$ och $f_{\min}$ måste existera och att de inträffar antingen vid stationära punkter, singulära punkter eller vid $\pm\pi$ (intervallets ändpunkter).

   Derivatan blir

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x - \cos x = \cos x \cdot (e^{\sin x} - 1)$$

   och är noll antingen när $\cos x = 0$ (vilket i intervallet $[-\pi, \pi]$ inträffar vid $\pm\pi/2$ eller när $e^{\sin x} = 1$, dvs när $\sin x = 0$ (vilket ger 0 samt $\pm\pi$, men de sista är ju änpunkter så att de blir undersökta ändå). Funktionen har dessutom inga singulära punkter. Vi behöver alltså jämföra funktionens värden vid $\pm\pi, \pm\pi/2$ samt 0. Vi får

$$f(-\pi) = 1,\ f(-\pi/2) = 1 + e^{-1},\ f(0) = 1,\ f(\pi/2) = -1 + e,\ f(\pi) = 1$$

   Vi ser att $f_{\max} = -1 + e$ ($e \approx 2.718281$) och att den antas vid $\pi/2$ medan $f_{\min} = 1$ och att den antas vid $-\pi$, 0 samt π.

7. a) Se boken, sid. 192.

   b) Beräkna $\left(f^{-1}\right)'(22)$ om $f(x) = x^4 + 7x^2 - 13x + 1$.

   Enligt satsen i a)

$$\left(f^{-1}\right)'(22) = \frac{1}{f'(-1)}$$

   (så snart $f'(-1) \neq 0$) ty $f(-1) = 22$. Men $f'(x) = 4x^3 + 14x - 13$ så att $f'(-1) = -31 \neq 0$. Således

$$\left(f^{-1}\right)'(22) = -\frac{1}{31}.$$