Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)

2006–01–09 kl. 08.00—13.00

1. a) Gränsvärdet är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi faktoriserar täljaren och förlänger nämnaren med ett konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+3-2^2}(\sqrt{x+3}+2)=\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=2\cdot 4=8.\end{aligned}$$

b) Den här gången är gränsvärdet av typ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Vi delar både täljaren och nämnaren med x (så att under rotuttrycket delar vi med x^2):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+3x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

ty både $1/x$ och $1/x^2$ går mot 0 då $x\to\infty$.

2. a)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

b) Om $f(x)=\frac{1}{x^2}$ så har vi

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2h}=\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

3. Den sökta tangenten har formen $y=kx+m$ där $k=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Men enligt produktregeln

$$f'(x)=\arcsin(x)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

så att

$$k=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

Således, den sökta tangenten har formen $y = \left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)x + m$. Vid $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ har vi

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

så att

$$m = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Den sökta tangenten är alltså $y = \left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)x - \frac{3}{2}$.

4. Funktionen

$$f(x) = xe^{-x}$$

är definierat överallt: $D_f = \mathbf{R}$ (inga hål i D_f). Det finns uppenbart enbart ett nollställe $x = 0$. Derivatan blir

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

och singulära punkter saknas. Punkten $x = 1$ är naturligtvis den enda stationära punkten. Deriverar vi en gång till får vi

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

så att $f'' = 0$ enbart vid $x = 2$. Teckentabell är mycket enkelt att konstruera ty $e^{-x} > 0$ alltid.

x	$]-\infty, 1[$	1	$]1, 2[$	2	$]2, \infty[$
f''	$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$		$-$
f	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$
	konkav	lok.max.	konkav	inflektionspunkt	konvex

Vi ser att funktionen är konvex för $x > 2$ och konkav vid $x < 2$ ($x = 2$ är således en inflektionspunkt). Funktionen har en lokalt maximum (som är även globalt) vid $x = 1$ och är strängt avtagande för $x > 1$ och strängt växande för $x < 1$. Dessutom har funktionen inga vertikala asymptoter. Vi ser däremot att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

medan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

så att $y = 0$ är en horisontell asymptot då $x \to +\infty$. Vid $-\infty$ kan vi eventuellt ha en sned asymptot. Vi kollar detta:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty,$$

så att sned asymptot vid $-\infty$ saknas. Samlar vi ihop det vi kom fram till kan vi rita funktionen. Den ser ut som på Figure 1.

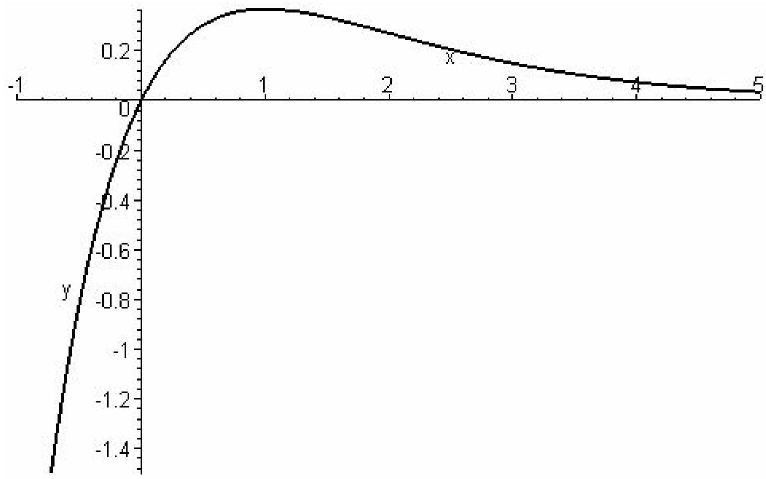

Figure 1:

5. Eftersom $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ samt $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$ får vi at

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \text{ samt } \; e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi.$$

Den första relationen ger

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

medan den andra leder till

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Dessa formler är välkända Eulers formler som vi behöver bla för att integrera olika trigonometriska uttryck.

6. a) Se boken, sid. 206.

b) Betrakta intervallet $[0, b]$. Medelvärdessatsen i p. a) säger att det finns en punkt $\xi \in]0, b[$ så att

$$\frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(\xi) \tag{1}$$

Men $f(b) = \sqrt{1+b}$ och $f(0) = 1$ medan

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{2}$$

(ty $\xi \in]0, b[$ och är således större än 0). Således, ur (1) får vi

$$\frac{\sqrt{1+b} - 1}{b} < \frac{1}{2}$$

vilket efter omskrivningen ger den sökta olikheten:

$$\sqrt{1+b} < 1 + \frac{b}{2}.$$

7. a) Deriverar vi funktionen får vi

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2}.$$

Derivatans nämnare är alltid större än noll. Betrakta derivatans täljare:

$$T(x) = x \cos x - \sin x.$$

Förstås $T(0) = 0$. Dessutom

$$T'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

är negativ på intervallet $]0, \pi]$. Det betyder att T avtar mellan 0 och π och är alltså $(T(0) = 0)$ negativ där. Det betyder i sin tur att $f' < 0$ på det angivna intervallet och att funktionen således är strängt avtagande. Detta medför att funktionen är injektiv och alltså inverterbar.

b) Vi inser att

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}.$$

Enligt satsen om derivatan av inversa funktionen får vi då

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{\pi}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\pi^2}{3\left(\pi\sqrt{3} - 6\right)}.$$