Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)

2006–08–10 kl. 14.00—19.00

1. a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(5x)}{4x^2-5x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin(5x)}{5x}\cdot\frac{5x}{4x^2-5x}\right] = $$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin(5x)}{5x}\cdot\frac{5}{4x-5}\right] = 1\cdot\frac{5}{0-5} = -1,$$

ty

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(5x)}{5x} = 1$$

enligt ett standardgränsvärde (obs: $5x \to 0$ då $x \to 0$).

b) När $x \to -\infty$ har vi att $3x-7<0$ och således $|3x-7| = 7-3x$. Den återstående beräkningen är elementär:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{|3x-7|} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{7-3x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{7}{x}-3} = -\frac{2}{3}$$

2. Ekvationen

$$\arcsin(2x) = \arccos(3x)$$

är definierad för $x \in \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ (annars faller $3x$ utanför intervallet $[-1,1]$ och HL är ej definierat). Vidare, $VL \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] = V_{\text{arcsin}}$ medan $HL \in [0,\pi] = V_{\text{arccos}}$ och därför måste vi ha att $VL = HL \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vilket leder till att $x \in \left[0,\frac{1}{3}\right]$. Vi tillämpar nu sin ledvis till ekvationen. Vi får

$$2x = \sin(\arccos(3x)) = +\sqrt{1-\cos^2(\arccos(3x))} = \sqrt{1-(3x)^2}$$

(vi tar + när vi uttrycker sin som funktion av cos med hjälp av *trigettan* ty vi har precis konstaterat att $\arccos(3x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ och dess sin måste alltså vara positiv). Kvadrerar vi den uppkomna ekvationen (obs! falska rötter kan uppstå) får vi

$$4x^2 = 1-9x^2$$

eller

$$13x^2 = 1$$

dvs $x = -1/\sqrt{13} \notin \left[0,\frac{1}{3}\right]$ (som är alltså en falsk rot) eller $x = 1/\sqrt{13} \in \left[0,\frac{1}{3}\right]$ som är alltså en möjlig lösning. Ås så länge har vi bara visat att $\sin(HL) = \sin(VL)$ vid $x = 1/\sqrt{13}$ men eftersom $VL = HL \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ där ekvationen $\sin x = \sin y$ har bara en lösning $x = y$ (dvs sin är injektiv där) kan vi konstatera att $x = 1/\sqrt{13}$ är verkligen en lösning (den enda) till ekvationen. Man kan även lätt se att det finns högst en lösning ty VL är en strängt växande kontinuerlig funktion medan HL är en strängt avtagande kontinuerlig funktion så deras grafer kan träffas högst en gång.

3. a) Om $f(x) = x + 1/x$ så har vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h+\frac{1}{x+h}-x-\frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[1+\frac{x-(x+h)}{h\cdot x\cdot(x+h)}\right] = \\ &= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

b) Om $f(x) = \ln(x)$ så har vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ty om vi sätter $u = h/x$ ($u \to 0$ då $h \to 0$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

enligt ett standart gränsvärde.

4. Proceduren är mycket standard och därför anger jag - på ett kortfattad sätt - enbart de viktigaste steg.

a) $D_f = \mathbf{R}$ (inga hål i D_f, inga vertikala asymptoter)

b) $x = 0$ ett enda nollställe (obs: $f(x) > 0$ för $x \neq 0$).

c) Derivator:

$$f'(x) = e^{-x}(2-x)x$$

samt

$$f''(x) = e^{-x}(x^2-4x+2) = e^{-x}\left(x-(2-\sqrt{2})\right)\left(x-(2+\sqrt{2})\right)$$

så att stationära punkter: $x = 0$ samt $x = 2$, singulära punkter: inga, andraderivatans nollställen: $f''(x) = 0$ vid $x = 2 \pm \sqrt{2}$ (kandidater för inflektionspunkter).

d) Teckentabell kan ni lätt rita själva (fyra viktiga punkter: $0, 2$ samt $2 \pm \sqrt{2}$). Funktionen är växande på intervallet $]0, 2[$ och avtagande annars så att $x = 0$ är en lokal minimipunkt (med $f(0) = 0$) medan $x = 2$ är en lokal maximipunkt med $f(2) = 4e^{-2}$. Vidare, punkterna $2 \pm \sqrt{2}$ är inflektionspunkter och funktionen är konvex på $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right[\cup \left]2+\sqrt{2}, \infty\right[$och konkav annars (dvs på $\left]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right[$).

e) Asymptoter: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så att $y = 0$ är en horisontell asymptot vid $x \to \infty$. Dessutom $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ så att horisontell asymptot vid $-\infty$ saknas. Det finns inte heller någon sned asymptot vid $-\infty$, ty

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty.$$

f) Vi ritar nu funktionen. Resultat kan åskådas på Figure 1.

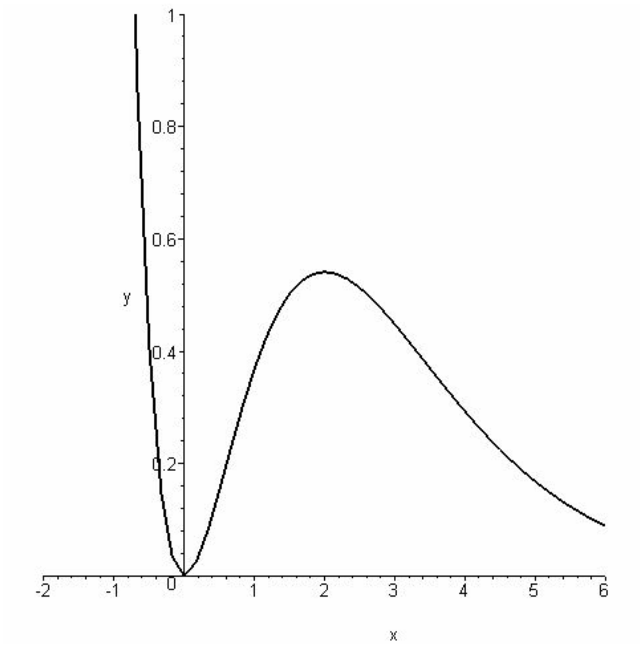

Figure 1:

5. Först skriver vi om talet $z = -1 + i\sqrt{3}$ i polär form. Naturligtvis $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$. Talet ligger dessutom i 2:a kvadranten vilket tillsammans med faktum att $\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ger att argumentet $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Således, $z = 2e^{2i\pi/3}$ och alltså

$$\begin{aligned} z^{37} &= 2^{37}e^{74i\pi/3} = 2^{37}e^{(12\cdot 2+2/3)i\pi} = 2^{37}e^{2i\pi/3} = 2^{37}\left(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\right) = \\ &= 2^{37}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{36} + i2^{36}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

6. Vi vet att $f_{\max}$ och $f_{\min}$ antas ty f är kontinuerlig och definierad på ett slutet och begränsat intervall (sats 3.8 sid. 148). Vi vet dessutom att extrempunkter kan förekomma enbart vid ändpunkterna ± 3, singulära punkter och stationära punkter. Singulära punkter har vi där $x^2 - x - 2 = 0$ dvs vid -1 och 2. Stationära punkter får vi när vi löser ekvationen $f'(x) = 0$. För att kunna göra det måste vi först beräkna derivatan. För att göra det skriver vi först om själva funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 \text{ ifall } x^2 - x - 2 \geq 0 \text{ dvs om } x \leq -1 \text{ eller } x \geq 2 \\ -x^2 + x + 2 \text{ ifall } x^2 - x - 2 < 0 \text{ dvs om } -1 < x < 2 \end{cases}$$

Nu deriverar vi:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ om } x < -1 \text{ eller } x > 2 \\ \text{finns ej vid } x = -1 \text{ eller } x = 2 \\ -2x + 1 \text{ om } -1 < x < 2 \end{cases}$$

och vi ser lätt att $x = \frac{1}{2}$ är ett enda stationära punkt. Det är dags att jämföra funktionens värden i alla dessa punkter:

$$f(-3) = 10, \quad f(-1) = 0, \; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}, \quad f(2) = 0, \; f(3) = 4,$$

så att $f_{\max} = 10$ antas vid $x = -3$ medan $f_{\min} = 0$ antas vid -1 och 2 (funktionen är ritad på Figur 2).

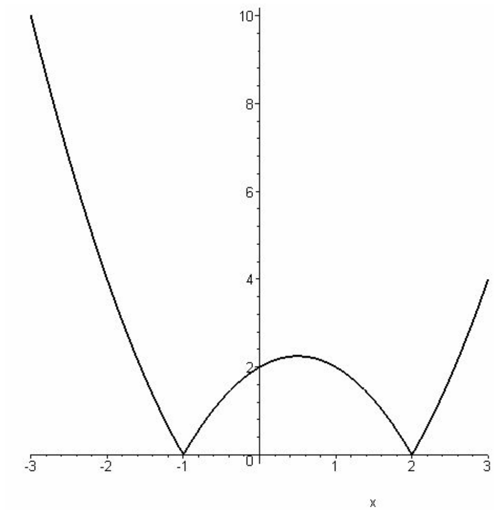

Figure 2:

7. a) Se boken, sid. 206.

   b) Se boken, sid. 207 ("bevis för sats 4.8").