Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för kontrollskrivningen 2 i envariabelanalys TNIU 70

2005-11-11 kl. 08.00—10.00

1. a) Vi deriverar högerledet med hjälp av kedjeregeln och får genast integranden:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|f(x)|\right) = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

b) Vid båda fallen nyttjar vi formeln ur a):

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + C,$$

$$\int \frac{\sin x}{a + b\cos x}\, dx = -\frac{1}{b}\int \frac{-b\sin x}{a + b\cos x}\, dx = -\frac{1}{b}\int \frac{(a + b\cos x)'}{a + b\cos x}\, dx = -\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x| + C.$$

2. a) Om f och g är kontinuerligt deriverbara på ett intervall I så gäller för $a, b \in I$ att

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx \tag{1}$$

b) Vi utför partiell integration genom att integrera $f'(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ samt derivera $g(x) = \ln x$. Vi får då $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ (konstanten behövs ej) samt $g'(x) = 1/x$. Sätter vi in allt detta i formeln (1) får vi

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln x\, dx &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\, dx = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

Således,

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\, dx &= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)\right]_{x=1}^{x=4} = \frac{2}{3}\left[8\left(\ln 4 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\right] = \\ &= \frac{2}{3}\left[16\ln 2 - \frac{14}{3}\right] = \frac{32}{3}\ln 2 - \frac{28}{9}.\end{aligned}$$

3. **Metod 1 (standard, via partialbråksuppdelningen):** Integranden är en rationell funktion med polynom av grad 1 i täljaren samt grad 2 i nämnaren, vi behöver alltså ej att utföra polynomdivision. Täljaren faktoriseras på följande sätt:

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2.$$

Således, den korrekta ansatsen för att partialbråksuppdela integranden är följande:

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2}.$$

Genom att skriva om HL till ett bråk (via MGN, minsta gemensamma nämnaren) får vi:

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} = \frac{A(3x-1)+B}{(3x-1)^2}.$$

Jämför vi VL med HL får vi då

$$9x - 5 = 3Ax + B - A$$

dvs $3A = 9$ och $B - A = 5$. Detta ger $A = 3$ samt $B = -2$. Således:

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = 3\int \frac{dx}{3x-1} - 2\int \frac{dx}{(3x-1)^2}. \tag{2}$$

Båda integraler löses snabbast med hjälp av samma variabelbyte: $y = 3x - 1$, vilket ger $dy = 3dx$ eller $dx = dy/3$. Detta ger:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\ln|y| + C_1 = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C_1$$

samt

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{3}\int y^{-2}dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{y^{-1}}{-1} + C_2 = -\frac{1}{3y} + C_2 = -\frac{1}{3(3x-1)} + C_2.$$

Vi kan nu fortsätta beräkningen enligt formeln (2):

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = 3\int \frac{dx}{3x-1} - 2\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \ln|3x-1| + \frac{2}{3(3x-1)} + C,$$

där $C = 3C_1 - 2C_2$.

Metod 2: Man kan lösa uppgiften även med en annan metod som grundar sig på det faktum att integrandens täljare är *nästan* derivatan av nämnaren:

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{18x-10}{9x^2-6x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{18x-6-4}{9x^2-6x+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{18x-6}{9x^2-6x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{9x^2-6x+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(9x^2-6x+1)'}{9x^2-6x+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\ln(3x-1)^2 + C - 2\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \\
&= \ln|3x-1| + C - 2\int \frac{dx}{(3x-1)^2}
\end{aligned}$$

där den andra integralen löser vi som ovan. Analysera noggrant denna metod! Kommer att behövas vid flera tillfällen.

4. a) Se boken, sid. 290.

   b) Enligt analysens huvudsats

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt = e^{x^2}\sin x.$$