Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

2005-12-14 kl. 08.00—13.00

1. Differentialekvationen

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\,y = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

är linjär av 1:a ordningen så den kan lösas med hjälp av integrerande faktorn $h(x) = e^{F(x)}$ där

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

(C behövs ej här /kan väljas som 0/). I vårt fall blir den alltså

$$h(x) = e^{\ln\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}.$$

Multiplicerar vi ekvationen med h får vi:

$$y' \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,y = \sin x.$$

Som vanligt, VL är en derivata av $y \cdot h$. Således

$$y(x) \cdot \sqrt{1+x^2} = \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

och därför

$$y(x) = \frac{C - \cos x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. a) Se boken sid. 358.

b) Vi vet enligt Maclaurinsatsen att $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ och således

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 - x^2}{x^4}$$

(obs att vi behöver bara en term i utvecklingen i nämnaren). Men

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) = \\ &= x \cdot x + x \cdot \left(-\frac{x^3}{6}\right) + O(x^6) + \left(-\frac{x^3}{6}\right) \cdot x + O(x^6) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6),\end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6) - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + O(x^6)}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3} + O(x^2)\right) = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. Vi börjar med den allmänna lösningen av den homogena delen av ekvationen. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har en dubbelrot $r = 2$ så att

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{2x}.$$

Nu måste vi hitta en partikulärlösning y_p. Eftersom HL är en summa av två olika funktioner utnyttjar vi superpositionsprincipen och hittar separat y_{p_1} för

$$y'' - 4y' + 4y = 4x \tag{1}$$

och sen y_{p_2} för

$$y'' - 4y' + 4y = 5 \sin x \tag{2}$$

En bra ansats för y_{p_1} är $y_{p_1} = Ax + B$. Stoppar vi in denna i ekvationen (1) hittar vi snabbt att $y_{p1} = x + 1$. En bra ansats för y_{p_2} är

$$y_{p_2} = A \cos x + B \sin x$$

som insatt i ekvationen (2) ger

$$y_{p_2} = \frac{4}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x$$

Den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen är alltså

$$y(x) = y_h + y_p = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = (C_1 x + C_2)e^{2x} + x + 1 + \frac{4}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x. \tag{3}$$

Nu letar vi efter den lösning som tangerar x-axeln i origo. Villkoren är alltså $y(0) = y'(0) = 0$. Sätter vi in dessa i (3) får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_2 + 1 + \frac{4}{5} = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 1 + \frac{3}{5} = 0 \end{cases}$$

ur vilket fås $C_1 = 2, C_2 = -9/5$. Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = \left(2x - \frac{9}{5}\right) e^{2x} + x + 1 + \frac{4}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x.$$

4. Enligt en välkänd (förhoppningsvis) formel ges γ:s längd av

$$l(\gamma) = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Men $x'(t) = 2t$ och $y'(t) = 1 - t^2$ så att

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4 = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2,$$

så att

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2+1)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)\, dt = \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5. Vi kvadratkompletterar först och gör ett variabelbyte:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 4x + 7}\, dx = \int \sqrt{(x-2)^2 + 3}\, dx = \begin{bmatrix} y = x - 2 \\ dy = dx \end{bmatrix} = \int \sqrt{y^2+3}\, dy.$$

I nästa steg bearbetar vi integranden så här:

$$I = \int \frac{y^2+3}{\sqrt{y^2+3}}\, dy = 3 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+3}} + \int y \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} dy = 3I_1 + I_2.$$

I_1 är en standardprimitiv:

$$I_1 = \ln\left|y + \sqrt{y^2+3}\right| + C_1$$

medan I_2 räknas ut med hjälp av partiell integration (vi deriverar y och integrerar $y/\sqrt{y^2+3}$). Vi får

$$I_2 = y\sqrt{y^2+3} - \int \sqrt{y^2+3}\, dy = y\sqrt{y^2+3} - I + 2C,$$

där C är en godtycklig konstant. Således,

$$I = 3\ln\left|y + \sqrt{y^2+3}\right| + y\sqrt{y^2+3} - I + 2C$$

vilket ger

$$I = \frac{3}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2+3}\right| + \frac{1}{2} y\sqrt{y^2+3} + C.$$

Återgår vi till x får vi slutligen

$$\int \sqrt{x^2-4x+7}\, dx = \frac{3}{2}\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2-4x+7}\right| + \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-4x+7} + C.$$

6. Den sökta volymen blir

$$V = \pi \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx = \pi \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx.$$

(integralen är generaliserad i $+\infty$). Vi hittar först primitiv funktion:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx = \arctan(x+1) + C,$$

så att

$$V = \pi \lim_{b\to\infty} [\arctan(x+1)]_0^b = \pi \lim_{b\to\infty} (\arctan(b+1) - \arctan(0+1)) = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

7. a) Vi skall visa att (under lämpliga förutsättningar)

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))\cdot g'(x). \tag{4}$$

Vi inför beteckningen:

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

så att

$$\int_a^{g(x)} f(t)dt = S(g(x)).$$

Enligt kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(S(g(x))\right) = S'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x),$$

den sista likheten tack vare analysens huvudsats, som ju säger att $S'(x) = f(x)$.

b) Enligt (4)

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{3} \sin(t^5)dt = -\frac{d}{dx}\int_3^{x^3} \sin(t^5)dt = -\sin((x^3)^5)\cdot 3x^2 = -3x^2\sin(x^{15}).$$