Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)
2006-04-18 kl. 08.00—13.00

1. Vi börjar med a). Genom att utnyttja standarda Maclaurinutvecklingar får vi att

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+O(x^5)}{x^3}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+O(x^2)\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}.$$

Vi räknar b) nu. Först skriver vi om funktionen och sen byter vi variabeln x mot $t=x-1$ (obs att $t\to 0$ då $x\to 1$):

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}\lim_{x\to 1}e^{\ln x/(1-x)}=\lim_{t\to 0}e^{\ln(t+1)/(-t)}=\lim_{t\to 0}e^{-1+O(t)}=e^{-1},$$

ty, enligt en känd Maclaurinutveckling,

$$-\frac{1}{t}\ln(1+t)=-\frac{1}{t}(t+O(t^2))=-1+O(t).$$

2. Vi letar först efter den homogena lösningen y_h. Karakteristiska ekvationen är $r^2-3r+2=0$ och har rötterna 1 och 2. Således

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

En partikulär lösning y_p hittar vi genom att sätta in ansatsen $y_p=Ax^2+Bx+C$ in i ekvationen. Vi får lätt att $y_p=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$. Således, den allmänna lösningen för hela ekvationen blir

$$y=y_h+y_p=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}. \tag{1}$$

Kravet vi har leder till två följande begynnelsevillkor för $y(x)$: $y(0)=0$ samt $y'(0)=2$. Sätter vi in (1) i dessa får vi ekvationssystemet:

$$C_1+C_2+\frac{7}{4}=0,\ \ C_1+2C_2+\frac{3}{2}=2$$

vilket ger $C_1=-4$, $C_2=\frac{9}{4}$. Svar: den sökta lösningen är

$$y=-4e^x+\frac{9}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}.$$

3. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y^2}$$

är separabel och kan skrivas om till en separerad form:

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = dx.$$

Integrerar vi den får vi:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int dx$$

eller (båda integraler är standardprimitiver)

$$\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right| = x + C.$$

Detta är redan den allmänna lösningen, dock i en implicit form. Vi måste lösa den med avseende på y. Eftersom

$$\left|y+\sqrt{y^2+1}\right| = e^{x+C} = e^C e^x = C_1 e^x \text{ där } C_1 > 0$$

så är

$$y + \sqrt{y^2+1} = De^x \text{ med } D \neq 0.$$

Flyttar vi y till HL och kvadrerar ekvationen får vi

$$y^2 + 1 = (De^x - y)^2 = D^2 e^{2x} - 2De^x y + y^2.$$

y^2-termerna förkortas och vi kan lösa den återstående ekvationen med avseende på y:

$$y = \frac{D^2 e^{2x} - 1}{2De^x} = \frac{1}{2}\left(De^x - \frac{1}{De^x}\right)$$

(det finns ett snyggare sätt att skriva ner lösningen - med hjälp av s.k. hyperboliska funktioner, som vi dock inte betraktar på kursen).

4. Integranden i

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx$$

är en rationell funktion som vi integrerar med hjälp av vår 4-stegsmetoden. Steg 1 behövs ej. Steg 2 är lätt:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2. \tag{2}$$

Steg 3 (partialbråksuppdelning): enligt (2)

$$\frac{2x-1}{x^2-6x+9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

och enkla räkningar leder till att $A = 2$ och $B = 5$. Således (steg 4)

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{(x-3)^2} = 2\ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + C.$$

5. Den sökta arean ges av integralen

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+((ax^2)')^2}dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4a^2x^2}dx = \begin{bmatrix} t = 1+4a^2x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 8a^2x \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{8a^2}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1+4a^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2\pi}{8a^2}\int_1^{1+4a^2} \sqrt{t}dt = \frac{\pi}{4a^2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{t=1}^{t=1+4a^2} = \frac{\pi}{6a^2}\left[\left(1+4a^2\right)^{3/2} - 1\right].$$

6. a)

$$\int_c^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)dx$$

b) Vi inför beteckningen

$$I(a) = \int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx.$$

Vi räknar ut primitiv funktion:

$$\int \frac{1}{x^a}dx = \int x^{-a}dx = \begin{cases} \frac{x^{-a+1}}{-a+1} + C \text{ om } a \neq 1 \\ \ln|x| + C \text{ om } a = 1 \end{cases}$$

Det syns direkt då att $I(1)$ divergerar. För $a \neq 1$:

$$I(a) = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^R = \frac{1}{1-a}\lim_{R\to\infty}\left(R^{1-a} - 1\right)$$

som existerar ändligt enbart om $1 - a < 0$ dvs om $a > 1$. Alltså:

$$I(a) = \begin{cases} \frac{1}{a-1} \text{ om } a > 1 \\ \text{divergerar om } a \leq 1 \end{cases}$$

7. a) Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ så finns minst ett tal $t \in [a, b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(t)\cdot(b-a)$$

b) Vi tillämpar satsen ovan till $[a, b] = [2, 4]$ och $f(x) = e^{-x^2}$ samt utnyttjar det att f är strängt avtagande på intervallet så att den antar sitt största värde vid 2:

$$\int_2^4 e^{-x^2}dx = e^{-t^2}(4-2) \leq 2e^{-2^2} = 2e^{-4},$$

där t är ett tal någonstans mellan 2 och 4.