Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

2006-08-14 kl. 08.00—13.00

1. a)

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

b) Det sökta polynomet är naturligtvis Taylorpolynomet för f av ordning 2 kring $a = 1$. Vi ser att $f(1) = (\ln 2)^2$. Vi räknar först ut de derivator vi behöver:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ln(2x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{2\ln(2x)}{x}, \quad f'(1) = 2\ln 2 \\ f''(x) &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot x - 2\ln(2x) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln(2x)}{x^2}, \quad f''(1) = 2 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Således, det sökta polynomet är

$$p_2(x) = (\ln 2)^2 + 2\ln 2\,(x-1) + (1 - \ln 2)\,(x-1)^2.$$

2. a) Se boken, sid. 386–387.

b) Ekvationen

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = x$$

kan (efter dividering med $\tan x$) skrivas som

$$y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{\cos x}{\sin x} x. \tag{1}$$

Den integrerande faktorn är $h(x) = e^{F(x)}$ där $F(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln(\sin x)$ (absolutbelopp runt sin behövs ej ty på det angivna intervallet är $\sin x \geq 0$). Således

$$h(x) = e^{\ln(\sin x)} = \sin x.$$

Multiplicerar vi ekvationen (1) med h får vi

$$y' \cdot \sin x + \cos x \cdot y = x \cdot \cos x$$

eller

$$\frac{d}{dx}(y \cdot \sin x) = x \cdot \cos x$$

vilket leder till

$$y(x)\sin x = \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + C$$

(där integralen beräknas med hjälp av partiell integration - man deriverar x och integrerar $\cos x$). Alltså, den allmänna lösningen $y(x)$ är

$$y(x) = \cot x + x + \frac{C}{\sin x}.$$

3. Vi löser först den homogena ekvationen $y'' + y = 0$. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har rötterna $\pm i$ så att
$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$
Vi måste nu hitta en partikulär lösning till hela ekvationen. Vi gör en ansats
$$y_p = A \cos 2x + B \sin 2x.$$
Sätter vi in denna i ekvationen får vi
$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x = a \cos 2x + b \sin 2x$$
eller $-3A = a$, $-3B = b$. Således, $y_p = -\frac{1}{3} a \cos 2x - \frac{1}{3} b \sin 2x$ och
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{3} a \cos 2x - \frac{1}{3} b \sin 2x.$$

4. a) Se boken, sid. 246.

b) Integralen
$$I(a) = \int e^{ax} \sin x \, dx$$
blir elementär ifall $a = 0$:
$$I(0) = \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$
Om $a \neq 0$ beräknas $I(a)$ med hjälp av partiell integration (2 gånger). Först integrerar vi (t.ex.) e^{ax} och deriverar $\sin x$:
$$I(a) = \frac{e^{ax}}{a} \sin x - \frac{1}{a} \int e^{ax} \cos x \, dx$$
Vi fortsätter med att integrera partiellt den andra integralen:
$$\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos x + \frac{1}{a} \int e^{ax} \sin x \, dx,$$
så att
$$I(a) = \frac{e^{ax}}{a} \sin x - \frac{1}{a} \left(\frac{e^{ax}}{a} \cos x + \frac{1}{a} I + C_1 \right)$$
(obs C_1). Detta är en ekvation för I och kan skrivas som
$$I(a) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cos x - \frac{1}{a^2} I + C_2$$
eller
$$\frac{a^2+1}{a^2} I(a) = \frac{1}{a} e^{ax} \sin x - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cos x + C_2.$$
Till sist
$$I(a) = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x) + C. \tag{2}$$
Obs att uttrycket ger även rätt primitiv funktion vid $a = 0$. Vi konstaterar att $I(a)$ ges av (2) för samtliga värden på a.

5. a)

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h^2(\varphi) + [h'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \qquad (3)$$

b) Beräkna längden av kurvan $r = \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Enligt formeln (3)

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = \pi.$$

Kan du gissa vad det är för kurva? Du känner den väl (hoppas jag).

6. Den sökta volymen ges av

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_2^3 xy(x)\, dx = 2\pi \int_2^3 \frac{x}{x + x^2}\, dx = 2\pi \int_2^3 \frac{dx}{1+x} = 2\pi \left[\ln|1+x|\right]_2^3 = 2\pi(\ln 4 - \ln 3) \\ &= 2\pi \ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

7. Se boken, sid. 292–293.