Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för kontrollskrivningen i matematisk analys TNIU 70

för BI1, TL1, MK1, ES1

2006-09-25 kl. 8.00—10.00

1. Ekvationen:
$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$
är en kvadratisk ekvation i variabeln $t = \sin x$ där $t \in [-1,1]$. Vi har alltså
$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$
med lösningar $t = 2 \notin [-1,1]$ (kastas bort) samt $t = \frac{1}{2}$. Således, $\sin x = \frac{1}{2}$ och ur (t.ex.) enhetscirkeln får vi två familjer av lösningar:
$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \;\; n \in \mathbf{Z} \\ x &= \frac{5}{6}\pi + 2n\pi, \;\; n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

2. a) Funktionen $f : [7,\infty[\to \mathbf{R}$ med
$$f(x) = \sqrt{x-7}$$
har definitionsmängden $D_f = [7,\infty[$ samt värdemängden $V_f = [0,\infty[$ (funktionens graf är ju den förskjutna grafen av rotfunktionen $\sqrt{x}$). Således
$$D_{f^{-1}} = V_f = [0,\infty[\,,\; V_{f^{-1}} = D_f = [7,\infty[\,.$$
Vi får den explicita formen för f^{-1} om vi räknar ut x ur sambandet $y = f(x) = \sqrt{x-7}$. Sambandet ger $y^2 = x - 7$ dvs $x = y^2 + 7 = f^{-1}(y)$. Således,
$$f^{-1}(x) = x^2 + 7.$$

b) Vi räknar först $f \circ f^{-1}$ (tänk hela tider på elefanter!)
$$f \circ f^{-1}(x) = f\left(x^2+7\right) = \sqrt{(x^2+7)-7} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$
(den sista likheten tack var det att $x > 0$ om $x \in D_{f^{-1}} = V_f = [0,\infty[$). Vidare (elefanter igen!), för alla $x \in D_f = [7,\infty[$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\left(\sqrt{x-7}\right) = \left(\sqrt{x-7}\right)^2 + 7 = x - 7 + 7 = x.$$
Således, de bägge sammansatta funktionerna är identitetsfunktioner (naturligtvis).

3. a) Vi faktoriserar både täljaren och nämnaren och förkortar singulariteter:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{2+2}{2-3}=-4.$$

b) Både $\arctan x$ och $\arctan(2x)$ har samma gränsvärde i $+\infty$, nämligen $\frac{\pi}{2}$. Således,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(2x)}{\arctan x}=\frac{\pi/2}{\pi/2}=1.$$

c) Vi förlänger täljaren med dess konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. a) $f: D_f \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig i en punkt $a \in D_f$ om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

b) Funktionen

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{ifall } x\neq 0\\[2ex] b \text{ ifall } x=0\end{cases}$$

är säkert kontinuerlig utanför punkten 0. I punkten $a=0$ blir den kontinuerlig ifall (se def i a))

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = b.$$

Men

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2=2,$$

den sista likheten tack vare ett standard gränsvärde. Således, f blir kontinuerlig enbart för $b=2$.