Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI, ES, MK, TL

2006-10-17 kl. 14.00—19.00

1. Alla dessa tre gränsvärden är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$.

a) Det första gränsvärdet löser vi genom att faktorisera täljaren:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \\ &= \lim_{x\to 2}\left[(x+2)(x^2+4)\right] = 4\cdot 8 = 32.\end{aligned}$$

b) Vi förlänger uttrycket med nämnarens konjugatuttryck:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3x+1}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{3x+1-1} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}+1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

c) Här använder vi oss av ett känt standardgränsvärde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1,$$

ty om x går mot 0 så går även $\sin x$ mot 0 (tänk på elefanter!).

2. a)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

b) Från a) har vi att

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(1+h)+1}{(1+h)^2+1}-\frac{3}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+2h}{h^2+2h+2}-\frac{3}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6+4h-3(h^2+2h+2)}{2(h^2+2h+2)h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2-3h}{2(h^2+2h+2)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Ekvationen

$$\arctan(3x) = \arcsin x \tag{1}$$

är definierad enbart där arcsin är definierad, dvs för $x \in D_{ekv} = [-1, 1]$. Vi noterar även att i (1) $HL = VL \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Om vi ledvis beräknar tan av (1) får vi

$$\tan(\arctan(3x)) = \tan(\arcsin x). \tag{2}$$

Emellertid är det alltid så att $\tan(\arctan(3x)) = 3x$ medan $\tan(\arcsin x) = \sin(\arcsin x)/\cos(\arcsin x) = x/\cos(\arcsin x)$ föralla $x \in D_{ekv}$. Dessutom, tack vare "trigettan"

$$\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

där plustecknet följer ur det faktum att $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ och cos är ≥ 0 där. Sätter vi allt detta in i ekvationen (2) får vi

$$3x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Efter kvadrering får vi då

$$9x^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

eller

$$9x^4 - 8x^2 = 0,$$

dvs $x^2(9x^2 - 8) = 0$. Vi får alltså tre möjliga lösningar: 0 samt $\pm\sqrt{8}/3 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, och alla ligger i D_{ekv}. Vi ser direkt att 0 är en sann lösning. Genom att stoppa in $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i (2) ser vi lätt att just för detta värde på x $\tan(VL) = \tan(HL)$ i (1). Men, som vi noterat, $HL = VL \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ så att $VL = HL$ för just detta värde på x i.e. $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ är en sann lösning av (1). På samma sätt kollar vi att även $x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ löser (1). Således, lösningsmängden till (1) består av tre tal: $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 0, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. Vi skall rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

med angivande av samtliga eventuella asymptoter, extrempunkter, samt intervaller av konkavtitet och konvexitet.

Vi följer den kända algoritmen.

- Först konstaterar vi att D_f består av samtliga reela tal utom ± 1 (det finns alltså två hål i D_f). Dessa skall läggas in i teckentabellen.
- f:s nollställen: $f(x) = 0$ endast vid $x = 0$.
- Vi räknar ut f' och f''och får (efter förenkling) att

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Vi ser alltså att $f' < 0$ för alla $x \in D_f$ så på varje delintervall är funktionen strängt avtagande och således stationära punkter och extrempunkter saknas. Vidare, $f''(x) = 0$ enbart för $x = 0$ som alltså skall placeras in i teckentabellen, som då antar följande form:

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \infty[$
$2x$	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$
f''	$-$	finns ej	$+$	0	$-$	finns ej	$+$
f	$\searrow$ konkav	finns ej	$\searrow$ konvex	0 inflektionsp.	$\searrow$ konkav	finns ej	$\searrow$ konvex

Vi ser alltså att funktionen är strängt avtagande på varje av delintervallen $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ samt $]1, \infty[$ samt att den är konvex för $x \in]-1, 0[\cup]1, \infty[$ och konkav annars dvs för $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

- Det återstår att undersöka eventuella asymptoter. Först undersöker vi punkterna $x = \pm 1$ (hål i D_f) som kan då innehålla vertikala asymptoter. Vi konstaterar snabbt att

$$\lim_{x \to -1_\pm} f(x) = \pm\infty \quad \text{samt} \quad \lim_{x \to 1_\pm} f(x) = \pm\infty$$

(obs teckenuppsättning). Detta betyder att både $x = -1$ och $x = 1$ är vertikala asymptoter. Vidare,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

så att linjen $y = 0$ är en horisontell asymptot för f både vid $+\infty$ och vid $-\infty$. Det betyder också att sneda asymptoter saknas. Samlar vi allt vi fick veta om funktionen kan vi lätt rita den (se Figure1).

5. Det komplexa talet $z = 1 - i\sqrt{3}$ kan skrivas på polär form som $z = 2e^{-i\pi/3}$. Således

$$z^{50} = 2^{50} e^{-50i\pi/3} = 2^{50} e^{-16i\pi} e^{-2\pi i/3} = -2^{49}\left(1 + i\sqrt{3}\right),$$

ty $e^{-16\pi i} = 1$.

6. Vi skall hitta största och minsta värde för funktionen

$$f : [-2, 3] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = e^x - x.$$

Vi vet att $f_{\max}$ och $f_{\min}$ måste existera och att de inträffar antingen vid stationära punkter, singulära punkter eller vid -2 eller 3 (intervallets ändpunkter).

Derivatan blir $f'(x) = e^x - 1$ och är noll endast när $x = 0$. Funktionen har dessutom inga singulära punkter. Vi behöver alltså jämföra funktionens värden vid -2, 0 samt 3. Vi får

$$f(-2) = e^{-2} + 2, \;\; f(0) = 1, \; f(3) = e^3 - 3.$$

Eftersom $e \approx 2.71$ ser vi att $f_{\max} = e^3 - 3$ och att det antas vid 3 medan $f_{\min} = 1$ och att det antas vid 0.

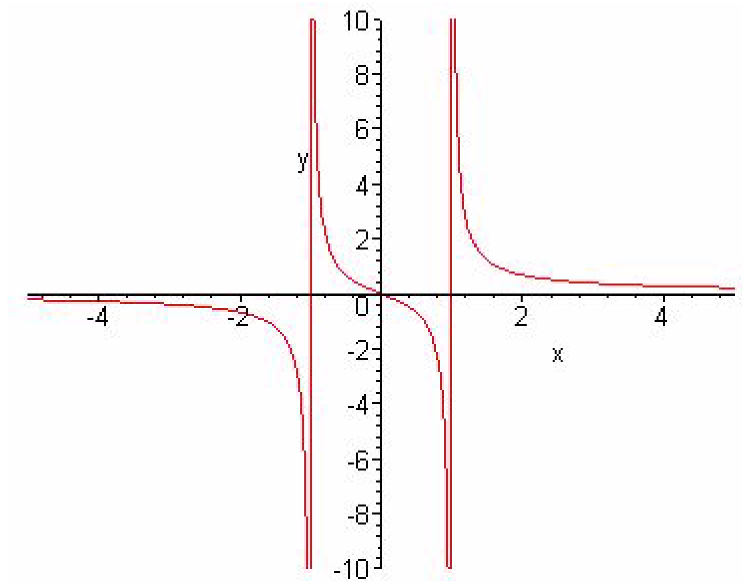

Figure 1:

7. a) se boken, Sats 4.6 sid. 192.

b) Om $f(x) = \tan x$ med $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ så är $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ med $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbf{R}$. Enligt satsen i a)

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{1 + \tan^2(a)}$$

där $b = f(a) = \tan a$. Således

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{1 + \tan^2(a)} = \frac{1}{1 + b^2}.$$

Uträkningen gäller för alla $b \in D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ ty $f'(a) \neq 0$ för alla $a \in D_f$. Byter vi b mot x får vi den sökta formeln.