Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)
för BI, ES, MK, TL
2007-01-08 kl. 08.00—13.00

1. a) Vi bryter ut x ur rotuttrycket och förkortar den sen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

b) Den här gången $x\to-\infty$ och då är $\sqrt{x^2}=|x|=-x$. Således,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=...=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. a) Vi kan visa att funktionen

$$f:[-3,0]\to R,\quad f(x)=x^2+6x+2$$

är inverterbar på minst två olika sätt: genom att visa att den är injektiv eller genom att visa att den är strängt växande på D_f. Den andra metoden är snabbare: $f'(x)=2x+6=2(x+3)>0$ på D_f ty $x>-3$ där (utom i ändpunkten -3). Således, f är strängt växande.
b) Vi löser ekvationen $y=f(x)=x^2+6x+2=(x+3)^2-7$ m.a.p. x. Vi får först att $(x+3)^2=y+7$ och således $x+3=+\sqrt{y+7}$ (obs tecknet! Det följer ur det att $x+3\geq 0$ på D_f) eller

$$x=-3+\sqrt{y+7}=f^{-1}(y).$$

Detta ger

$$f^{-1}(x)=-3+\sqrt{x+7}.$$

Vidare, $V_{f^{-1}}=D_f=[-3,0]$ medan $D_{f^{-1}}=V_f=[-7,2]$ (rita f för att se detta). För inlärningens skull bör du dessutom rita f och f^{-1} på en och samma figur.

3. För att funktionen

$$f(x)=\begin{cases} e^x+A & \text{för } x\leq 0\\ Bx+5 & \text{för } x>0\end{cases}$$

skall vara deriverbar i 0 måste den först vara kontinuerlig i 0. Kontinuiteten kräver att

$$f(0)=1+A=\lim_{x\to 0}f(x).$$

Naturligtvis,

$$\lim_{x\to 0_-}f(x)=1+A$$

så att funktionen är alltid vänsterkontinuerlig i 0. Vidare

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (Bx+5) = 5,$$

så att kontinuiteten kräver att $1+A=5$ eller $A=4$. Deriverbarheten i 0 uppnås om

$$f'_-(0) = f'_+(0)$$

Men

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{e^h + A - (1+A)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(oavsett av värdet av A alltså, kan du förklara det?) medan

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{Bh+5-(1+A)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{Bh}{h} = B$$

så att f är deriverbar i 0 om vi väljer dessutom $B=1$.

4. Ekvationen $3z - i\overline{z} = 4+2iz$ kan lätt lösas om vi sätter in $z = x+iy$ i den. Detta ger

$$3(x+iy) - i(x-iy) = 4 + 2i(x+iy)$$

eller

$$3x + 3iy - ix - y = 4 + 2ix - 2y$$

eller

$$3x - y + i(3y-x) = 4 - 2y + i2x.$$

Jämför vi ledvis reella och imaginära delar av ekvationen får vi ett system av två linjära ekvationer för två obekanta x, y:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 - 2y \\ 3y - x = 2x \end{cases}$$

Detta system kan lösas t.ex. genom vanlig substitution. Systemet har enbart en lösning: $x=1$, $y=1$. Således, ekvationen har endast en lösning, $z = 1+i$.

5. a) Se boken sid. 187.

b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln(1+\cos x^2) &= \frac{1}{1+\cos x^2}\cdot\left(-\sin x^2\right)\cdot 2x = -\frac{2x\sin x^2}{1+\cos x^2}, \\ \frac{d}{dx}\arctan(1+x^2) &= \frac{1}{1+(1+x^2)^2}\cdot 2x = \frac{2x}{2+2x^2+x^4}. \end{aligned}$$

6. Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

är definierad för alla $x \neq -1$ och för $x = -1$ har vi ett nollställe i nämnaren. Vi kollar lätt att

$$\lim_{x \to -1_{\pm}} f(x) = \mp\infty$$

(obs teckenuppsättning) vilket visar att linjen $x = -1$ är en vertikal asymptot för funktionen. Dessutom,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

så att horisontella asymptoter vid både $+\infty$ och $-\infty$ saknas. Vi kollar då sneda asymptoter. Först vid $+\infty$:

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} = 1 \\
m &= \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 4}{x + 1} - 1 \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} = \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-4 - x}{x + 1} = -1.
\end{aligned}$$

Således, $y = x - 1$ är en asymptot för f vid $+\infty$. Liknande uträkning visar att samma linje är funktionens asymptot även vid $-\infty$. Funktionen samt asymptoterna kan åskådas på Figure 1.

7. a) Se boken sid. 206.

b) I vårt fall har vi att $f'(x) = 2x$ samt att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$$

Vi letar alltså efter ett t så att $f'(t) = b + a$. Detta ger snabbt att $t = \frac{1}{2}(b + a)$ alltså i vårt fall ligger punkten t exakt mitt emellan punkterna a och b. Rita detta så förstår du bättre!

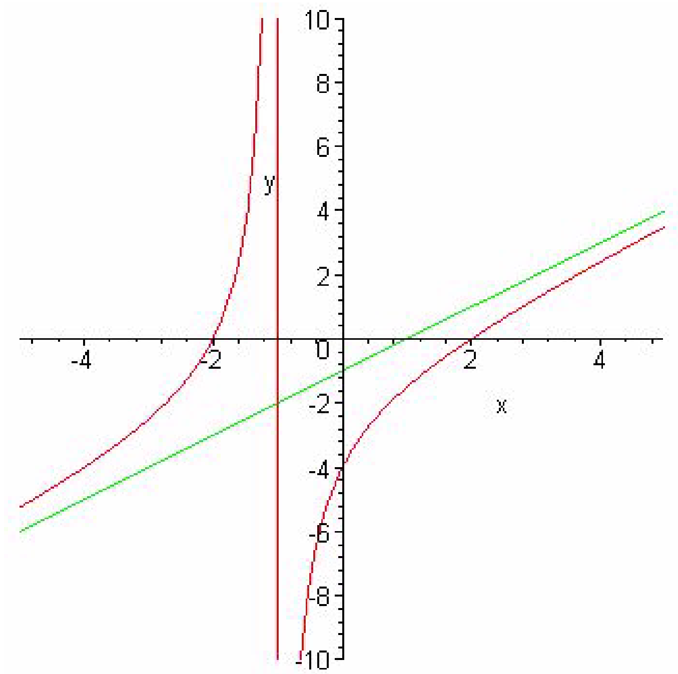

Figure 1: