Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI, ES, MK, TL

2007-08-16 kl. 08.00—13.00

1. Olikheten
$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}<0$$
är meningslös då nämnaren är 0 dvs för $x=-1$ samt $x=2$. F.ö. ser vi (genom att t.ex. kvadratkomplettera den) att täljaren är alltid positiv så att $VL<0$ precis då $x^2-x-2<0$, dvs när $x\in\,]-1,2[$.

2. a) Funktionen $f:D_f\to R$ är kontinuerlig i en punkt $a\in D_f$ om
$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$
b) Funktionen
$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ för } x\leq 1\\ 2-x^2 \text{ för } x>1\end{cases}$$
är (enligt definitionen i a)) kontinuerlig i 1 om $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$. Men $f(1)=1^2=1$ medan gränsvärdet i 1 finns enbart om
$$\lim_{x\to 1_-}f(x)=\lim_{x\to 1_+}f(x)$$
dvs om
$$\lim_{x\to 1_-}x^2=\lim_{x\to 1_+}(2-x^2)$$
vilket är ju sant ty både HL och VL är lika med 1. Således, $\lim_{x\to 1}f(x)=1=f(1)$ och därför är funktionen kontinuerlig i 1.

3. Om $f(x)=xe^{-x^2}$ så är $f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)<0$ på $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right[$ ty
$$1-2x^2<0 \iff x<-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eller } x>\frac{1}{\sqrt{2}}$$
Således, f är strängt avtagande på det angivna intervallet och därför injektiv där.

4. Funktionen$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ är definierad enbart för $x>0$. Funktionens inflektionspunkt hittar vi genom att först derivera f två gånger:
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\qquad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3},$$
så att $f''(x)=0$ endast då $2\ln x=3$ dvs då $x=e^{3/2}$. Vi ser också att $f''(x)<0$ för $0<x<e^{3/2}$ och $f''(x)>0$ för $x>e^{3/2}$. Det betyder att $x=e^{3/2}$ är funktionens enda inflektionspunkt. Tangenten till grafen vid denna punkt är
$$y=f'(e^{3/2})x+m.$$

Vi hittar lätt att $f'(e^{3/2}) = -\frac{1}{2}e^{-3}$. Således, tangenten blir

$$y = -\frac{1}{2}e^{-3}x + m$$

där koefficienten m kan vi hitta om vi sätter in punkten $(e^{3/2}, f(e^{3/2}) = (e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2})$ i tangentens ekvation:

$$\frac{3}{2}e^{-3/2} = -\frac{1}{2}e^{-3} \cdot e^{3/2} + m.$$

Detta ger $m = 2e^{-3/2}$. Den sökta tangenten blir alltså

$$y = -\frac{1}{2}e^{-3}x + 2e^{-3/2}.$$

5. De tal som uppfyller villkoret $|z - i| = |z - 1|$ är precis det tal som ligger på samma avstånd från talen i och 1. Lösningen består alltså av samtliga komplexa tal $z = x + iy$ för vilka $x = y$. Således, lösningsmängden består av samtliga tal $x + ix$ där $x \in \mathbf{R}$.

6. Betrakta funktionen

$$f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Vi deriverar den och ser efter några rätt tråkiga uträkningar att $f'(x) = 0$ för alla x dvs att funktionen är konstant, $f(x) = C$ för alla x. För att hitta värdet på C räcker det då att välja en punkt, säg $x = 0$, och sätta den in i funktionen. Vi får $C = f(0) = \arctan 0 - \arcsin 0 = 0 - 0 = 0$.

7. a) Eftersom

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3^3 - 2^3}{3 - 2} = 19$$

så måste det sökta t uppfylla villkoret $f'(t) = 19$ eller $3t^2 = 19$ vilket ger $t = +\sqrt{\frac{19}{3}} \in [2, 3]$ (den andra lösningen kastas bort - varför?).

b) Ja men enbart om f är också deriverbar åtminstone på $]2, 3[$ och detta garanteras av medelvärdessatsen för derivator (se boken).