Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivning 2 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI1, ES1, MK1, TL1
2006-11-15 kl. 8.00—10.00

1. a) Naturligtvis

$$\int f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + C,$$

vilket bevisas lätt genom att derivera HL tillbaka:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}f(x)^2 + C\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) + 0 = f(x) \cdot f'(x)\,.$$

b) Om vi sätter $f(x) = \arctan x$ så är $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ så att

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + C = \frac{1}{2}\arctan^2(x) + C.$$

Om vi nu istället sätter $f(x) = a + b\cos x$ så har vi att $f'(x) = -b \sin x$ vilket ger

$$\int (a + b\cos x) \sin x\, dx \ = -\frac{1}{b}\int f(x) \cdot f'(x)\, dx = -\frac{1}{2b}(a + b\cos x)^2 + C = -a\cos x - \frac{b}{2}\cos^2 x + C_1,$$

(ty a och b är konstanter).

2. a) Vi gör variabelbytet $y = 3x^4 + 7$ som ger att $\frac{dy}{dx} = 12x^3$ eller att $x^3 dx = \frac{1}{12} dy$. Detta ger

$$\int x^3 \sqrt{3x^4 + 7}\, dx = \frac{1}{12}\int \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{12}\int y^{1/2}\, dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{18}\left(3x^4 + 7\right)^{3/2} + C.$$

b) Vi partiellintegrerar med $f'(x) = x$ och $g(x) = \ln x$ så att $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ medan $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_1^2 x \ln x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

3. Den sökta arean är naturligtvis lika med

$$\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2 - x - 2}\, dx$$

(obs att $f > 0$ på intervallet $[3,4]$). Vi kan nu använda vår algoritm för integration av rationella funktioner. Steg 1 behövs ej. Steg 2:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

så att ansatsen i Steg 3 ser ut så här:

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Genom antingen handpåläggning eller vanlig uträkning (via gemensam nämnare etc.) kommer vi fram till att $A = \frac{1}{3}$ medan $B = \frac{8}{3}$. Således

$$\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{8}{3}\int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{8}{3}\ln(x-2)\right]_3^4 = \frac{1}{3}\ln 5 + 2\ln 2$$

(obs att absolutbeloppet i uträkningen behövs ej pga att både $x+1$ och $x-2$ är > 0 på intervallet ifråga).

4. a) Se boken sid. 290 (Sats 6.7)

   b) Enligt satsen

$$\frac{d}{dx}\int_5^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   c) Vi har att

$$F(x) = \int_5^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \left[\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_5^x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| - \ln\left(5+\sqrt{26}\right)$$

- enligt en standardprimitiv, som kan även uträknas genom variabelbytet $\xi = t + \sqrt{t^2+1}$ (sk 1:a Eulers substitution). Således

$$F'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) + 0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$