Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)
för BI, ES, MK, TL
2006-12-15 kl. 8.00—13.00

1. a) se boken, sid. 386

   b) Differentialekvationen
$$y' - \frac{2}{x}\, y = \frac{3}{x^2}$$
löses med hjälp av integrerande faktor som i det här fallet är $h(x) = e^{-2\ln|x|} = |x|^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Multiplicerar vi ekvationen ledvis med $h(x)$ får vi
$$\frac{1}{x^2}\, y' - \frac{2}{x^3}\, y = \frac{3}{x^4}.$$
VL blir som vanligt derivatan av produkten av den sökta funktionen y och h. Vi får alltså
$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{3}{x^4}$$
eller
$$\frac{y}{x^2} = 3\int \frac{dx}{x^4} = 3\int x^{-4}dx = 3\frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C.$$
Således, den allmänna lösningen blir
$$y(x) = -\frac{1}{x} + Cx^2,$$
vilket kan lätt kontrolleras. Gjorde du det på tentamen?

2. a) se boken, sid. 358.

   b) Vi vet att $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$ medan $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$. Således
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3(\cos x - 1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3\left(1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) - 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{120} + O(x^7)}{x^3\left(-\frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{120} + O(x^2)}{-\frac{1}{2!} + O(x^2)} = -\frac{1}{60}.\end{aligned}$$

3. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 9 = 0$ har två komplex konjugerade lösningar $r_1 = -3i$ samt $r_2 = 3i$. Således, den allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen blir $y_h = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$. För att hitta en partikulärlösning till hela ekvationen sätter vi $y(x) = z(x)e^{2x}$ in i ekvationen. Vi får:
$$y' = z'e^{2x} + 2ze^{2x}, \;\; y'' = z''e^{2x} + 4z'e^{2x} + 4ze^{2x}.$$
Sätter vi in detta i ekvationen får vi
$$e^{2x}(z'' + 4z' + 13z) = 13xe^{2x}$$
eller (eftersom $e^{2x} \neq 0$ alltid)
$$z'' + 4z' + 13z = x$$

En lämplig ansatz är $z_p = Ax + B$ som ger $z' = A$ och $z'' = 0$ dvs $4A + 13(Ax + B) = 13x$ eller $A = 1$, $B = -\frac{4}{13}$. Således, den allmänna lösningen för ekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + \left(x - \frac{4}{13}\right) e^{2x}.$$

4. Naturligtvis, den givna kurvan är helt enkelt den övre halvan av cirekln med radien 1 och med mittpunkten i $(1, 0)$, varför den sökta längden blir

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r = \pi.$$

Om man inte inser det måste man dock beräkna längden på det sedvanliga sättet, genom att använda den kända formeln:

$$l(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

I vårt fall

$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}},$$

så att

$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{(1 - x)^2}{2x - x^2} = \frac{2x - x^2 + 1 - 2x + x^2}{2x - x^2} = \frac{1}{2x - x^2}.$$

Det betyder att

$$l(\gamma) = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} dx = [\arcsin(x - 1)]_0^2 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

5. Roterar vi γ ett varv kring x-axeln uppstår det naturligtvis en sfär med radien $r = 1$ som har då ytan $4\pi r^2 = 4\pi$. Om du inte insåg det direkt så kunde du istället gå tillväga på följande sätt. Enligt en välkänd formel är den sökta arean lika med

$$A = 2\pi \int_0^2 f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Enligt uträkningar i uppgift 4 får vi snabbt att $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 1$ så att

$$A = 2\pi \int_0^2 dx = 4\pi.$$

6. a) Se boken, sid. 391.

b) Differentialekvationen

$$x^2 y' = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$

är separabel och kan skrivas om som

$$dy = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Integrerar vi ledvis får vi

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\text{variabelbyte: } t=\frac{1}{x},\ \frac{dx}{x^2}=-dt\right] = -\int \sin t\,dt = \cos t + C = \cos\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

Således, den allmänna lösningen för ekvationen blir

$$y(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

För att fånga upp den lösning som går genom $(\frac{1}{\pi}, 2)$ sätter vi in villkoret $y(\frac{1}{\pi}) = 2$ in i lösningen ovan. Vi får $2 = \cos\pi + C$ vilket ger $C = 3$. Således, den sökta lösningen är

$$y(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3.$$

7. Vi börjar med integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

som är generaliserad i 1. Det betyder att

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{c\to 1_-}\int_0^c \frac{dx}{1-x^2}.$$

Vi letar först efter en primitiv funktion till $1/(1-x^2)$ och det genom att tillämpa den av oss väl behärskade 4-stegsmetoden. Steg 1 behövs ej. Steg 2: faktorisering av nämnaren ger $1-x^2 = (1+x)(1-x)$. Det betyder att

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}.$$

Genom t.ex. handpåläggning hittar vi lätt att $A = B = \frac{1}{2}$ vilket ger

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) + D,$$

(där D är en godtycklig konstant) så att

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} &= \lim_{c\to 1_-}\int_0^c \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\lim_{c\to 1_-}\left[\ln|1+x| - \ln|1-x|\right]_0^c = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{c\to 1_-}\left(\ln(1+c) - \ln(1-c)\right) = +\infty,\end{aligned}$$

ty om $c \to 1_-$ så går $1-c$ mot 0_+ och $\lim_{x\to 0_+}\ln x = -\infty$. Integralen divergerar alltså mot $+\infty$.

Vidare, integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}.$$

är generaliserad i $+\infty$. Således,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+2^2} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\arctan 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Integralen konvergerar således till $\frac{\pi}{4}$.