Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)
för BI, ES, MK, TL
2007–04–10 kl. 8.00-13.00

1. Ekvationen kan lösas med hjälp av integrerande faktor $h(x) = e^{F(x)}$ där $F(x) = -2\int \frac{1}{x+1}dx = -2\ln|x+1| + D = \ln(x+1)^{-2} + D$. Vi väljer $D = 0$ och får $h(x) = (x+1)^{-2}$. Multiplicerar vi ekvationen ledvis med h får vi

$$\frac{y'}{(x+1)^2} - \frac{2y}{(x+1)^3} = x + 1$$

eller

$$\left(\frac{y}{(x+1)^2}\right)' = x + 1,$$

vilket ger

$$\frac{y}{(x+1)^2} = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

Således, ekvationens allmänna lösning är

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)(x+1)^2.$$

Vi letar nu efter den lösning som uppfyller kravet $y(2) = 0$. Enkel beräkning ger $0 = 9(4 + C)$ eller $C = -4$. Så, den sökta lösningen är

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right)(x+1)^2.$$

2. a) Den allmänna lösningen av differentialekvationen

$$y'' + 4y = \sin x - 2\cos x$$

har som vi vet formen $y = y_h + y_p$. Vi letar först efter y_h. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ har två komplexkonjugerade rötter $\pm 2i$ varför

$$y_h = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x).$$

En partikulär lösning y_p kan hittas via ansatzen $y_p = A\sin x + B\cos x$. Vi har då att $y_p' = A\cos x - B\sin x$ och $y_p'' = -A\sin x - B\cos x$. Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$-A\sin x - B\cos x + 4A\sin x + 4B\cos x = \sin x - 2\cos x$$

eller

$$3A\sin x + 3B\cos x = \sin x - 2\cos x$$

som ger $A = \frac{1}{3}$ och $B = -\frac{2}{3}$. Således, den allmänna lösningen av vår ekvation är

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin x - \frac{2}{3}\cos x.$$

b) Om en lösning $y(x)$ skall innehålla punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3})$ måste vi ha $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$ eller

$$\frac{1}{3} = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{2}$$

vilket ger $C_1 = 0$ medan C_2 får vara godtyckligt. Således, de sökta lösningarna har formen

$$y = y_h + y_p = C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x - \frac{2}{3} \cos x.$$

där C_2 är alltså en godtycklig konstant.

3. a) Se boken, sid. 355. (1p)

b) Vi använder oss av elementära Maclaurinutvecklingar (kap. 8.3) och får att

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6) \\ x\sin(2x) &= 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + O(x^6) \\ \ln(1+2x) &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

(obs att både i cos och sin tog jag en term mer än det egentligen behövs) så att

$$\begin{aligned} (\cos(2x) - x\sin(2x))\ln(1+2x) &= \left(1 - 4x^2 + 2x^4 + O(x^6)\right)\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)\right) = \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 8x^3 + O(x^4) = 2x - 2x^2 - \frac{16}{3}x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Det sökta Maclaurinpolynomet är alltså

$$p_3(x) = 2x - 2x^2 - \frac{16}{3}x^3.$$

4. Integranden i

$$\int \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2}\, dx$$

är en rationell funktion och vi måste då tillämpa vår 4-stegsmetoden. Steg1 - polynomdivision - ger

$$\frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{5x - 4}{x^2 - x - 2}.$$

Vidare (Steg 2 - faktorisering av nämnare) är $x^2 - x - 2$ lika med $(x+1)(x-2)$. Således

$$\frac{5x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-2}.$$

(= Steg 3 - partialbråksuppdelning. Koefficienterna A och B hittar vi t.ex. genom handpåläggning). Allt detta ger (Steg 4 - integration):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2}\, dx &= \int (x+1)\, dx + 3\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-2} = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

5. Den uppkomna kroppens volym får vi genom formeln

$$V = \pi \int_0^\pi [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx.$$

Vi partiellintegrerar 2 gånger:

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + \int e^{-x} \sin x \, dx,$$

vilket ger

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C.$$

Insättningsformeln ger nu

$$V = \pi \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \left[e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} (1 + e^{-\pi}).$$

6. Den sökta arean fås genom formeln

$$A = 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

I vårt fall

$$1 + \left[f'(x) \right]^2 = x$$

så att

$$A = 2\pi \int_1^2 x \sqrt{x} \, dx = 2\pi \int_1^2 x^{3/2} \, dx = 2\pi \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_1^2 = \frac{4}{5} \pi \left(2^{5/2} - 1 \right).$$

7. a) Se boken, sid. 290.

b) Enligt analysens huvudsats

$$G'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

så att $G'(x) = 0$ om och endast om $\cos x = 0$ vilket på det angivna intervallet inträffar i $x = \frac{1}{2}\pi$ samt i $x = \frac{3}{2}\pi$.