Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI, ES, MK, TL

2007–08–10 kl. 14.00-19.00

1. Differentialekvationen är linjär och av andra ordningen. Den karakteristiska ekvationen har formen $r^2 - 2r - 8 = 0$ med två skilda reella rötter $r_1 = 4$ och $r_2 = -2$. Således, den allmänna lösningen för den homogena delen av ekvationen blir

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

Det återstår att hitta en (partikulär) lösning för hela ekvationen. Eftersom HL är ett polynom använder vi oss av ansatsen $y_p = Ax + B$ vilket ger $y_p' = A$ samt $y_p'' = 0$. Sätter vi in detta i ekvationen får vi

$$0 - 2A - 8(Ax + B) = 4x - 2$$

eller

$$-8Ax - 2A - 8B = 4x - 2$$

vilket ger $A = -\frac{1}{2}$ och $B = \frac{3}{8}$. Den allmänna lösningen för hela ekvationen blir alltså

$$y = y_p + y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}.$$

2. Differentialekvationen

$$y' + 3x^2 y = 3x^2$$

är linjär och av 1:a ordningen. Vi kan alltså lösa den genom att multiplicera den ledvis med dess integrerande faktorn som ges av

$$h(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}.$$

Efter multiplikationen får vi

$$y' e^{x^3} + 3x^2 e^{x^3} y = 3x^2 e^{x^3}$$

eller

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{x^3}\right) = 3x^2 e^{x^3}$$

vilket ger

$$y e^{x^3} = \int 3x^2 e^{x^3} dx = \left[\text{variabelbyte: } x^3 = t,\, 3x^2 dx = dt\right] = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^3} + C.$$

Således, den allmänna lösningen av ekvationen är

$$y(x) = 1 + C e^{-x^3}.$$

Villkoret $y(0) = 2$ ger $2 = 1 + C$ eller $C = 1$. Således, den sökta lösningen är

$$y(x) = 1 + e^{-x^3}.$$

3. a) Integralen

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

kan lösas till exempel genom variabelbytet $x = 2\sin t$ vilket ger $dx = 2\cos t\,dt$ samt att t varierar från (t.ex., det finns andra intervall som är möjliga här, vilka?) 0 till $\pi/2$. Detta ger

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\;dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\;dt = \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = 2\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi.\end{aligned}$$

Resultatet är förresten självklart ty grafen till funktionen $\sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$ är en fjärdedel av en cirkel med radien $r = 2$ och integralen representerar arean av motsvarande kvartsskiva som är förstås lika med $\frac{1}{4}\pi r^2 = \pi$.

b) Vi har

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)e^{\sin x}dx &= 2\int_0^{\pi/2} \sin x\, e^{\sin x}\cos x\,dx = [\text{variabelbyte: } \sin x = t,\ \cos x\,dx = dt,\ t \in [0,1]] = \\ &= 2\int_0^1 te^t dt = [\text{partiellintegration}] = 2\left(\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) = \\ &= 2\left(e - \left[e^t\right]_0^1\right) = 2(e - e + 1) = 2.\end{aligned}$$

4. a) Om $f(x) = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2}$ så är $f(0) = 1$. Vidare:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2}\cdot 2 = (1+2x)^{-1/2}, \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2}\cdot 2 = -(1+2x)^{-3/2}, \quad f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \frac{3}{2}(1+2x)^{-5/2}\cdot 2 = 3(1+2x)^{-5/2}, \quad f'''(0) = 3.\end{aligned}$$

Således, det sökta polynomet är

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

b) Enligt a) har vi

$$\begin{aligned}e^x\cdot\sqrt{1+2x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right)\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)\right) = \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + O(x^4) \\ &\quad +x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + O(x^4) \\ &\quad +\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + O(x^4) \\ &\quad +\frac{x^3}{6} + O(x^4) \\ &\quad +O(x^4).\end{aligned}$$

Ser du hur vi stoppar in de oväsentliga termerna i ordo-termer? Detta ger till sist

$$e^x \cdot \sqrt{1+2x} = 1 + 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + O(x^4).$$

Det sökta polynomet blir således

$$p_3(x) = 1 + 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3.$$

5. Den sökta volymen fås av den välkända 'rörformeln' (se sid. 328):

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_1^2 xf(x)dx = 2\pi\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = [\text{variabelbyte: } x-1=t,\ dx=dt,\ t\in[0,1]] = \\ &= 2\pi\int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt = 2\pi\int_0^1 (t^{3/2}+t^{1/2})\,dt = 2\pi\left[\frac{t^{5/2}}{5/2}+\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{15}\pi. \end{aligned}$$

6. Kurvans längd ges av den kända formeln (med $h(\varphi) = \sin\varphi$):

$$l(\gamma) = \int_0^\pi \sqrt{h^2(\varphi) + [h'(\varphi)]^2}\,d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^\pi d\varphi = \pi.$$

Detta är självklart ty kurvan är helt enkelt en halvcirkel med radien 1 och med mittpunkten i $(0, \frac{1}{2})$.

7. a) Se boken, sid. 288.

b) Integralen kan inte beräknas med våra elementära metoder. Medelvärdessatsen för integraler försäkrar oss dock om att det finns (minst en) punkt $\xi \in [0,\pi]$ sådan att

$$\int_0^\pi \sin(x^3)dx = \sin(\xi^3)\cdot(\pi - 0).$$

Eftersom $\sin(\xi^3) \le 1$ (oavsett av värdet på den okontrollerbara punkten ξ) följer påståendet.