Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KSK1 i envariabelanalys TNIU 70
för BI1

2007-09-20 kl. 8.00—10.00

1. a) Ekvationen

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

har en rot $x = 2$ och således är VL (enligt faktorsatsen) delbart med faktorn $x - 2$. Efter polynomdivision får vi att

$$x^3 - 6x + 4 = (x - 2)(x^2 + 2x - 2).$$

Vidare, kvadratkomplettering eller pq-formeln ger att

$$x^2 + 2x - 2 = (x - (-1 - \sqrt{3}))(x - (-1 + \sqrt{3})).$$

Således, ekvationen har tre lösningar: $-1 \pm \sqrt{3}$ samt 2.

b) Enligt en additionsformel

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

2. Naturligtvis, $V_{f^{-1}} = D_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Eftersom f är strängt växande på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (varför?) ges V_f av

$$V_f = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [0, 1].$$

Således, $D_{f^{-1}} = V_f = [0, 1]$. Det återstår att räkna ut f^{-1}. Sambandet $y = \sin^2 x$ medför $\sin x = +\sqrt{y}$ (den andra lösningen $-\sqrt{y}$ kastas ty $\sin x \geq 0$ på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) så att $x = \arcsin\sqrt{y} = f^{-1}(y)$. Således

$$f^{-1}(x) = \arcsin\sqrt{x}.$$

3. a) Täljaren och nämnaren har en gemensam faktor:

$$\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \lim_{x\to 25}\frac{1}{\sqrt{x}+5} = \frac{1}{10}.$$

b) Vi förlänger uttrycket med täljarens konjugat:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Lite trigonometri:

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x} =$$
$$= \lim_{x\to\pi/4}(\cos x+\sin x) = \sqrt{2}.$$

4. a) Ta t.ex.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{för } x \neq 1 \\ 2 & \text{för } x = 1 \end{cases}$$

Då har vi att

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 2$$

(så att gränsvärdet $\lim_{x\to 1} f(x)$ förvisso existerar men är skild från funktionens värde i punkten).

b) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{för } x \leq -1 \text{ eller } x \geq 1 \\ \arcsin x & \text{för } -1 < x < 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig överallt utom i punkterna ± 1. Ta t.ex. punkten 1:

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

medan

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

så att $\lim_{x\to 1} f(x)$ existerar ej. Liknande analys visar att $\lim_{x\to -1} f(x)$ inte heller existerar.