Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)
för BI
2007-10-15 kl. 08.00—13.00

1. a) Vi upptäcker att det är faktorn $x-2$ som orsakar 0/0-situationen i gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{12}{4} = 3.$$

b) Vi förlänger uttrycket med dess konjugat:

$$\begin{aligned}\text{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Vi inser att ett standardgränsvärde är inbakat i uttrycket:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = -1.$$

(1+1+1p)

2. Ekvationen

$$\arctan(2x) = \arcsin x$$

är definierad för $x\in[-1,1]$ pga att HL är definierat enbart på $[-1,1]$. Vi beräknar nu tan av båda led. Vi får

$$2x = \tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{+\sqrt{1-x^2}},$$

där vi använder att $\tan(\arctan\alpha)=\alpha$ för alla $\alpha\in\mathbf{R}$, att $\sin(\arcsin x)=x$ för alla $x\in[-1,1]$ och att $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Vi väljer + för att $\arcsin x\in[-\pi/2,\pi/2]$ så att $\cos(\arcsin x)\geq 0$. Vi löser nu ekvationen genom att först kvadrera den (obs: falska rötter kan uppstå!):

$$4x^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \Longleftrightarrow 4x^2(1-x^2) = x^2 \Longleftrightarrow 3x^2-4x^4=0 \Longleftrightarrow x^2(3-4x^2)=0$$

vilket har lösningar $x=0$ samt $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Genom att sätta in alla dessa rötter i den ursprungliga ekvationen kollar vi lätt att samtliga rötter löser även denna dvs är verkliga lösningar av problemet.

3. a) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i 0 om $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Men $f(0) = 0$ medan

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})\right) = 0$$

ty sinus är en begränsad funktion. Således, f är kontinuerlig i 0.

b) Vi räknar ut funktionens derivata i 0 (obs: det är FEL att räkna ut $f'(x)$ och sedan låta $x \to 0$ för då förutsätter vi att f' är kontinuerlig i 0 vilket behöver inte vara sant!):

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 2h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1 + 2h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 1$$

(ty $\sin(1/h)$ är begränsad). Således, $f'(0)$ existerar och är lika med 1.

4. Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x - x^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

är definierad överallt utom i 0 och 1 så att $D_f = R \setminus \{0, 1\}$. Vidare, f har inga nollställen ty täljaren blir aldrig noll. Vi deriverar nu funktionen:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - x^2)^2}(1 - 2x) = \frac{2x - 1}{(x - x^2)^2}.$$

Således, singulära punkter saknas och det finns bara en stationär punkt: $x = 1/2$. Teckentabell (gör den själv!) innehåller alltså tre punkter: $0, 1/2$ och 1 och det följer ur den att f avtar för $x \in]-\infty, 0[$ och för $x \in]0, 1/2[$ och växer annars med en lokal minimipunkt i $x = 1/2$ då f är lika med 4. Vidare, efter några beräkningar finner vi att

$$f''(x) = -2\frac{1 - 3x + 3x^2}{x^3(x-1)^3}$$

så att f är konvex för $x \in]0, 1[$ och konkav annars och att inflektionspunkter saknas. Till sist, enkel uträkning visar att

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x\to 1\pm} f(x) = \mp\infty \text{ (obs teckenupsättning!)}$$

samt att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Detta betyder att $x = 0$ samt $x = 1$ är vertikala asymptoter medan $y = 0$ är en horisontell asymptot. Allt vi kom fram till kan nu användas för att rita funktionen, vars graf ser vi på Figure 1, där vi även ser de två vertikala asymptoterna (den tredje asymptot är horisontell och sammanfaller med x-axeln).

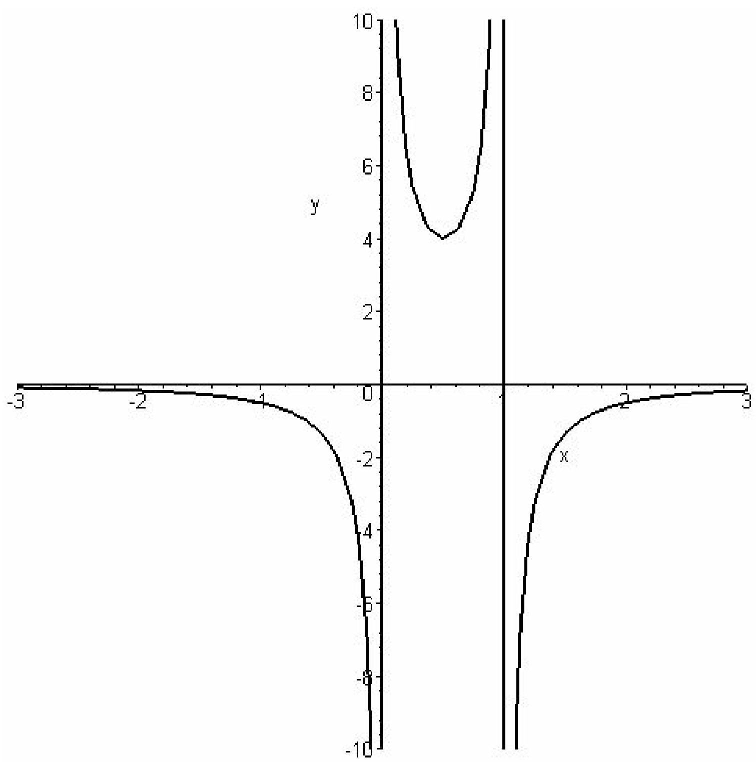

Figure 1: Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$ och dess asymptoter.

5. Proceduren är standard, så jag skissar den bara. Om $z = \sqrt{3} + 3i$ så är också $z = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$ så att $z^6 = 2^6 \cdot 3^3 e^{2\pi i} = 2^6 \cdot 3^3$.

6. Eftersom
$$f'(x) = x - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^3+x-2}{1+x^2}$$
så är $f'(x) = 0$ omm $x^3+x-2 = 0$. Men (faktorsatsen, $x = 1$ är ju en rot) $x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2)$ så att $f'(x) = 0$ enbart för $x = 1$ (det finns alltså en enda stationär punkt i intervallet). Eftersom singulära punkter saknas (varför?) hittar vi $f_{\max}$ och $f_{\min}$ genom att jämföra funktionens värden i punkterna $\pm\sqrt{3}$ samt 1. Vi får
$$f(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \text{ samt } f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2} - \frac{2\pi}{3}.$$
Således, $f_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3}$ antas vid $x = -\sqrt{3}$ medan $f_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$ antas vid $x = 1$.

7. a) Se boken, sid. 192.

   b) Enligt den ovannämnda satsen
$$(f^{-1})'(17) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{22},$$
ty $f(1) = 17$ samt $f'(x) = 7x^6 + 15$ så att $f'(1) = 7 \cdot 1^6 + 15 = 22 \neq 0$.