Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)
för BI
2008-01-07 kl. 14.00—19.00

1. a) Vi delar både täljaren och nämnaren med den term som dominerar i nämnaren, dvs med x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 8x + 4}{3x^3 - 4x + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

b) Vi använder ett standardgränsvärde:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^6 = e^6.$$

c) Standardgränsvärden igen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan 7x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \cdot \frac{7x}{\arctan 7x} \cdot \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}.$$

2. Ekvationen

$$\sin x - 1 = \cos^2 x.$$

kan med hjälp av "trigettan" skrivas som

$$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0.$$

Denna ekvation kan betraktas som en andragradsekvation för $\sin x$ och har lösningar $\sin x = -2$ (omöjligt, kastas bort, ty $\sin x \in [-1, 1]$) samt $\sin x = 1$. Således, ekvationens samtliga lösningar ges av

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

3. a) Derivatan av f i $a \in D_f$ är ett tal som ges av

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ifall gränsvärdet existerar ändligt. Annars säger vi att f inte är deriverbar i a.

b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2 h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{x^2(x+h)^2 h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3},\end{aligned}$$

vilket överensstämmer naturligtvis med det att $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ för alla $\alpha \in \mathbf{R}$.

4. a) Se boken, sid. 187.

   b) Enligt kedjeregeln

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

5. Eftersom $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ så misstänker vi att det kan finnas vertikala asymptoter vid $x=-1$ samt vid $x=3$. Eftersom

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{x^3}{(x+1)(x-3)} = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 3\pm} f(x) = \lim_{x\to 3\pm} \frac{x^3}{(x+1)(x-3)} = \pm\infty$$

(obs teckenuppsättning) så är både $x=-1$ och $x=3$ vertikala asymptoter. Vidare,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-2/x-3/x^2} = \pm\infty,$$

så att horisontella asymptoter saknas. Vi undersöker då existens av sneda asymptoter:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x-3} = 1$$

samt

$$m = \lim_{x\to\infty} [f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-2x-3} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2+3x}{x^2-2x-3} = 2,$$

vilket visar att linjen $y=x+2$ är en sned asymptot vid $+\infty$. Pss visar man att samma linje är en sned asymptot vid $-\infty$. Detta illustreras också på Figure 1 som visar funktionen och dess tre asymptoter.

6. Per definition, $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Således,

$$\begin{aligned} 2e^{i\pi/3} + \sqrt{2}e^{-i\pi/4} + i &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) + i = \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i = 2 + i\sqrt{3} = re^{i\varphi}, \end{aligned}$$

där $r = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7}$ medan φ ges t.ex. av $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. a) Se boken, sid. 206. (1p)

   b) Om $a=0$ är olikheten klart uppfylld. Antag nu att $a>0$. Vi tillämpar satsen i a) till funktionen $f(x) = e^x - 1 - x$ på intervallet $[0,a]$. Vi får då att det finns en punkt $t \in\,]0,a[$ sådan att

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(t)$$

eller

$$\frac{e^a - 1 - a - (e^0 - 1 - 0)}{a} = e^t - 1,$$

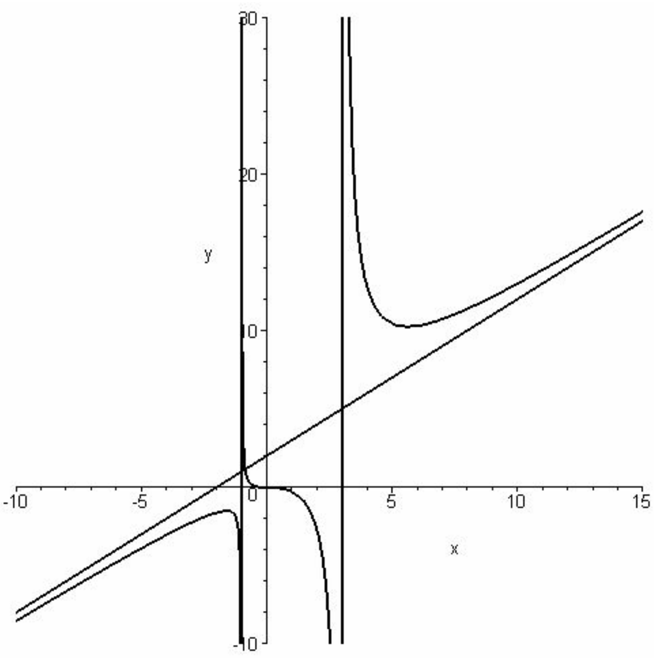

Figure 1: Funktionen $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x-3}$ och dess asymptoter.

dvs

$$e^a - 1 - a = a(e^t - 1) > 0$$

ty $e^t > 1$ för $t > 0$. Således, $e^a > 1 + a$ för $a > 0$. Genom att tillämpa satsen på intervallet $[a, 0]$ visar man att samma olikhet gäller även ifall $a < 0$. Observera att vi har här också visat att likhetstecken gäller enbart vid $a = 0$.