Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i envariabelanalys (TNIU 70)
för BI
2008-08-16 kl. 08.00—13.00

1. Ekvationen
$$\ln(x-2)+\ln(x+1)-\ln x=0$$
har mening enbart då $x-2>0, x+1>0$ samt $x>0$ så att sammanlagt är ekvationens definitionsmängd $D_{ekv}=]2,\infty[$. Logaritmlagar ger
$$\ln\frac{(x-2)(x+1)}{x}=0$$
så att
$$\frac{(x-2)(x+1)}{x}=1$$
eller $(x-2)(x+1)=x$ som har två lösningar: $1\pm\sqrt{3}$. Naturligtvis, bara $1+\sqrt{3}\in D_{ekv}$ och är således den enda lösningen till den ursprungliga ekvationen.

2. Definitionsmängden D_f till funktionen
$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\quad f(x)=\ln(x^2+2)$$
är förstås intervallet $[0,1]$. Eftersom funktionen är strängt växande (varför?) så ges värdemängden V_f av
$$V_f=[f(0),f(1)]=[\ln 2,\ln 3]\,.$$
Således, $D_{f^{-1}}=V_f=[\ln 2,\ln 3]$ medan $V_{f^{-1}}=D_f=[0,1]$. Det återstår bara att hitta den explicita formen för f^{-1}. Som vanligt, vi gör detta genom att lösa ut x ur sambandet $y=f(x)$:
$$y=\ln(x^2+2)\Longleftrightarrow x^2+2=e^y\Longleftrightarrow x=+\sqrt{e^y-2}=f^{-1}(y),$$
så att
$$f^{-1}(x)=+\sqrt{e^x-2}$$
där vi väljer + pga att $V_{f^{-1}}=D_f=[0,1]$ så att f^{-1} antar enbart icke-negativa värden.

3. Inflektionspunkter till kurvan $y=x^3-3x^2+2x$ hittar vi genom att titta på kurvans andraderivata:
$$y''(x)=6x-6=6(x-1)$$
vilket visar att $y''<0$ för $x<1$ och $y''>0$ för $x>1$. Detta betyder att $x=1$ är funktionens (enda) inflektionspunkt. Tangenten i denna punkt blir då $y_T=y(1)+y'(1)(x-1)$ eller
$$y_T=0-(x-1)=-x+1.$$

4. a) Vi använder kvotregeln. Resultatet är

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

b) Vi vet att $a^b = e^{b\ln a}$ så att

$$\begin{aligned}
[(\cos x)^x]' &= \left(e^{x\ln(\cos x)}\right)' = e^{x\ln(\cos x)}\,(x\ln(\cos x))' = (\cos x)^x\left(\ln(\cos x) + x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\right) = \\
&= (\cos x)^x\,(\ln(\cos x) - x\tan x)\,.
\end{aligned}$$

5. Vi noterar först att funktionen kan skrivas som

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Funktionens definitionsmängd är alltså $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ dvs alla reella tal utom 0 vilket kan tyda på en vertikal asymptot i 0. En enkel beräkning:

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm}\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$$

visar att $x = 0$ verkligen är en vertikal asymptot för funktionen. Vidare, man ser ur (1) att horisontella asymptoter saknas medan $y = x + 1$ är en sned asymptot vid både $+\infty$ och $-\infty$. Funktionen har inga nollställen ty ekvationen $x^2 + x + 1 = 0$ saknar reell lösning. Dags att derivera:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{x^2}.$$

Vi ser då att singulära punkter saknas och att funktionen har två stationära punkter: $+1$ och -1. Från teckentabellen (gör den!) följer då att funktionen är växande på $]-\infty, -1[$ samt på $]1, \infty[$ och avtagande på $]-1, 0[$ samt $]0, 1[$. Dessutom syns i teckentabellen att -1 är en lokal maximipunkt medan 1 är en lokal minimipunkt. Vidare, eftersom

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

ser vi att funktionen är strängt konkav på $]-\infty, 0[$ samt strängt konvex på $]0, \infty[$. Observera dock att 0 är ingen inflektionspunkt ty $0 \notin D_f$. Samlar vi all information om funktionen kan vi rita den. Funktionens graf syns på Figure 1, där vi också ritat dess bägge asymptoter.

6. Enligt Eulerformler

$$\begin{aligned}
\sin^2 x\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left[\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]^2 = \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}\right) = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

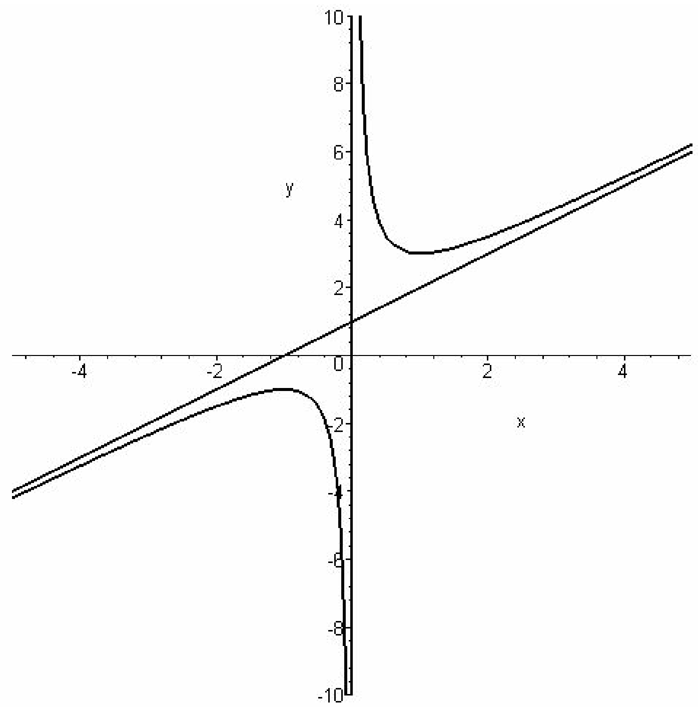

Figure 1: Funktionen $f(x) = \frac{1+x+x^2}{x}$ och dess två asymptoter.

7. Funktionen

$$f(x) = x^2 + \ln(x+1) - \sin x$$

har en stationär punkt i $x = 0$ ty

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \cos x$$

så att $f'(0) = 0 + 1 - 1 = 0$. Vidare,

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{(x+1)^2} + \sin x$$

så att $f''(0) = 1 > 0$. Detta medför (enligt Sats 4.12 sid. 220) att f har lokalt minimum i 0.