Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivning 2 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI1
2007-11-15 kl. 8.00—10.00

1. a) Formeln är

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C,$$

och bevisas snabbast genom att derivera tillbaka resultatet m.h.a. kedjeregeln. Formeln kan också härledas genom variabelbytet $y = f(x)$.

b) Bägge integralerna kan beräknas m.h.a formeln i a):

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x) + C$$

(absolutbeloppet behövs ej här ty $1 + e^x > 0$ alltid.

2. a) Vi använder oss av partiell integration - vi deriverar x och integrerar e^x:

$$\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

b) Variabelbyte $y = \cos x$ ger

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\cdot\sin x\,dx = \left[\begin{array}{ll} y = 1+\cos x & x = 0 \Rightarrow y = 1+\cos 0 = 2 \\ \sin x dx = -dy & x = \pi/2 \Rightarrow y = 1+\cos(\pi/2) = 0 \end{array}\right] =$$

$$= -\int_2^0 \sqrt{y}dy = \int_0^2 \sqrt{y}dy = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1) = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

3. Vi använder oss av 4-stegsalgoritmen för integration av rationella uttryck. Steg 1 går ut på att dela polynomet i täljaren med nämnaren. Vi får

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}.$$

Steg 2 är då att faktorisera nämnaren: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Således, partiellbråksuppdelning (Steg 3) ger (via handpåläggning eller på ett annat sätt)

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

så att till sist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

Kravet $F(2) = 0$ ger då $2 + \ln(1/3) + C = 0$ eller $C = \ln 3 - 2$. Svaret är då att den sökta primitiven är

$$x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \ln 3 - 2.$$

4. a) Vi skall beräkna

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\right) \tag{1}$$

via analysens huvudsats. Vi inför funktionen

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Uttrycket (1) blir då enligt kedjeregeln samt analysens huvudsats lika med

$$\frac{d}{dx}F(\sin x) = F'(\sin x)\cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1$$

ty $\cos x > 0$ på $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Naturligtvis

$$\int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = [\arcsin t]_{t=0}^{t=\sin x} = \arcsin(\sin x) - \arcsin 0 = x$$

ty $\arcsin(\sin x) = x$ på $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Den sökta derivatan är således lika med 1.