Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI

2007–12–14 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 386-387.

   b) Differentialekvationen
$$y' + \frac{y}{1+x} = x^2$$
   löses med hjälp av integrerande faktorn $e^{F(x)}$ där
$$F(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\,,$$
   så att
$$e^{F(x)} = e^{\ln|1+x|} = |1+x| = \pm(1+x)$$
   och vi kan välja t.ex. + (detta val fungerar på bägge sidor av singulariteten -1). Multiplicerar vi ekvationen med integrerande faktorn ovan får vi då
$$(1+x)y' + y = x^2(1+x)$$
   dvs
$$[(1+x)y]' = x^2 + x^3.$$
   Således
$$(1+x)y = \int (x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$
   Kravet $y(0) = 2$ ger oss nu$(1+0)\cdot 2 = C$ så att den sökta funktionen ges av
$$y(x) = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + 2\right).$$

2. Den karakteristiska ekvationen r^2+3r+2 har rötterna -1 och -2. Således, den allmänna lösningen för *den homogena* delen av ekvationen blir
$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$
   En bra ansats för en partikulär lösning av hela ekvationen är
$$y_p = Ae^x + B\sin x + C\cos x.$$
   Sätter vi in detta i ekvationen finner vi att $A = 1/6$, $B = 3/10$ samt $C = 1/10$. Således, den allmänna lösningen till *hela* ekvationen är
$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{3}{10}\sin x + \frac{1}{10}\cos x.$$

3. a) Ur Taylorsatsen vet vi att

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

så att

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+O(x^3)}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+O(x)\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) Vi ser att variabelsubstitutionen $t = x+1$ förvandlar detta gränsvärde till gränsvärdet i a) så att det är också lika med $-1/2$. Inser man inte det kan man lösa uppgiften genom att Taylorutveckla funktionen $f(t) = \ln t$ kring punkten 1. Man får då

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\frac{\ln t - t + 1}{t^2-2t+1} &= \lim_{t\to 1}\frac{t-1-\frac{1}{2}(t-1)^2+O((t-1)^3)-t+1}{(t-1)^2} = \\ &= \lim_{t\to 1}\frac{-\frac{1}{2}(t-1)^2+O((t-1)^3)}{(t-1)^2} = \lim_{t\to 1}\left(-\frac{1}{2}+O(t-1)\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. a) Integralen beräknas m.h.a. partiellintegration (vi deriverar x och integrerar e^{-x}):

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,dx = -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = 1-3e^{-2}.$$

b) Integralen är generaliserad i $+\infty$. Vi räknar således först en primitiv funktion; det görs via ett variabelbyte:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} y=-x^2 \\ x\,dx = -\frac{1}{2}dy\end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy = -\frac{1}{2}e^y + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

Således

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b^2}-1\right) = \frac{1}{2}$$

ty $\lim_{b\to\infty} e^{-b^2} = 0$.

5. Enligt rörformeln (sid. 328) blir den sökta volymen

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^1 x\frac{1}{x+1}\,dx = 2\pi\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}\,dx = 2\pi\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= 2\pi\left[x-\ln|x+1|\right]_0^1 = 2\pi(1-\ln 2).\end{aligned}$$

6. Vi uträknar först $1+(y')^2$:

$$\begin{aligned}1+(y')^2 &= 1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2 = 1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Således, den sökta längden blir

$$l = \int_0^{1/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx.$$

Vi hittar först en primitiv till integranden. Vi polynomdividerar och partiellbråksuppdelar, ty integranden är en rationell funktion:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Således

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \left(-1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= \left[-x - \ln|x-1| + \ln|x+1|\right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7. Sambandet

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt \tag{1}$$

deriveras först ledvis med hjälp av analysens huvudsats. Vi får då

$$y'(x) = 0 + y(x)$$

dvs den enkla separabla differentialekvationen $y' = y$ vars lösning är ju

$$y(x) = Ce^x.$$

Notera dock att ur (1) följer också att

$$y(0) = 1 + \int_0^0 y(t)\,dt = 1$$

så att $C = 1$. Den sökta funktionen är alltså $y(x) = e^x$.