Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI

2008–03–25 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 391.

   b) Differentialekvationen
$$y' - 2xy^2 = 0$$
   är separabel och efter variabelseparation antar formen
$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx.$$
   Integrerar vi detta ledvis får vi
$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$
   eller
$$y(x) = \frac{-1}{x^2 + C} \tag{1}$$
   där C är en godtycklig konstant. Observera att även $y = 0$ är en lösning, som dock inte ryms i lösningsmängden (1).

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har rötterna $\pm i$ så att den allmänna lösningen av motsvarande homogen ekvation är
$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$
   En bra ansats för en partikulär lösning är $y_p = Ae^x$. Sätter vi in detta i ekvationen får vi $A = \frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen av hela ekvationen är då:
$$y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$
   Kraven $y(0) = 0$ samt $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ger $C_1 + \frac{1}{2} = 0$ respektive $C_2 + \frac{1}{2}e^{\pi/2} = 0$ vilket ger $C_1 = -\frac{1}{2}$ och $C_2 = -\frac{1}{2}e^{\pi/2}$. Sammanfattningsvis, den sökta lösningen är
$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x - \cos x - e^{\pi/2}\sin x).$$

3. a) Se boken, Sats. 8.2 sid. 358.

   b) Eftersom
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$
   samt
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

får vi att

$$\begin{aligned}
e^x \ln(1+x^2) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+O(x^4)\right)\left(x^2-\frac{x^4}{2}+O(x^6)\right) = \\
&= x^2-\frac{x^4}{2}+O(x^6)+ \\
&\quad +x^3-\frac{x^5}{2}+O(x^7)+ \\
&\quad +\frac{x^4}{2}+O(x^6) \\
&\quad +\frac{x^5}{6}+O(x^7)+ \\
&\quad +O(x^6) \\
&= x^2+x^3-\frac{x^5}{3}+O(x^6).
\end{aligned}$$

Observera hur hanterar man ordo-termer som "soptunnor" för onödiga termer.

4. Först, partiellbråksuppdelar vi integranden:

$$\frac{3x-7}{x^2-2x+1} = \frac{3x-7}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}.$$

Vi inser alltså att integralen är generaliserad vid 1. Således

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3x-7}{x^2-2x+1}\,dx &= \lim_{a\to 1_+}\int_a^2\left(\frac{3}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx = \lim_{a\to 1_+}\left[3\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}\right]_a^2 = \\
&= \lim_{a\to 1_+}\left(3\ln 1+4-3\ln(a-1)-\frac{4}{a-1}\right) = -\infty.
\end{aligned}$$

Integralen är således divergent.

5. Den sökta längden blir

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{t^2+t^4}\,dt = \int_0^2 t\sqrt{1+t^2}\,dt = \begin{bmatrix} u=1+t^2 & t=0\Rightarrow u=1 \\ tdt=\frac{1}{2}du & t=2\Rightarrow u=5 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 = \frac{1}{3}\left(5^{3/2}-1\right) = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).
\end{aligned}$$

6. Den sökta arean är

$$A = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

En enkel uträkning visar att

$$1+\left[y'(x)\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}) = \left[\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right]^2$$

så att

$$A = \pi\int_0^1 x\left(e^x+e^{-x}\right)dx = [\text{P.I.}] = \pi\left[(x-1)e^x-(x+1)e^{-x}\right]_0^1 = 2\pi\left(1-e^{-1}\right),$$

där P.I. står för partiell integration, där vi deriverar x och integrerar e^x+e^{-x}.

7. a) Se boken, Sats. 6.5 sid. 288.

b) Enligt satsen i a) vet vi att det finns en punkt $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sådan att

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx = \sqrt{\sin \xi} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\sin \xi}.$$

Olikheten följer då ur det att $0 \leq \sin \xi \leq 1$ på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ty då även $0 \leq \sqrt{\sin \xi} \leq 1$ där.