Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN2 i envariabelanalys (TNIU 70)

för BI

2008–08–11 kl. 14.00-19.00

1. Ekvationen
$$y' + \frac{1}{\tan x} y = x \tag{1}$$
löses med hjälp av integrerande faktor $e^{F(x)}$ där
$$F(x) = \int \frac{1}{\tan x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln |\sin x|$$
(integrationskonstanten kan väljas noll, varför?) så att $e^{F(x)} = |\sin x| = \pm \sin x$. Vi kan dock alltid (dvs i varje intervall $]k\pi, (k+1)\pi[$) välja $+$. Multiplicerar vi (1) ledvis med denna faktor får vi
$$y' \sin x + y \cos x = x \sin x$$
eller
$$(y \sin x)' = x \sin x$$
dvs
$$\begin{aligned} y \sin x &= \int x \sin x\, dx \overset{\text{P.I.}}{=} \left[\begin{array}{cc} f = x & g' = \sin x \\ f' = 1 & g = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x + \int \cos x\, dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$
så att till sist
$$y(x) = \frac{1}{\sin x} (-x \cos x + \sin x + C) = -x \cot x + 1 + \frac{C}{\sin x}$$
vilket är alltså den allmänna lösningen av vår ekvation.

2. Ekvationen
$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{2}$$
är homogen och löses med hjälp av karakteristisk ekvation som här antar formen $r^2 - 2r + 2 = 0$ och som har två komplex konjugerade rötter $1 \pm i$. Således, den allmänna lösningen till ekvationen (2) är
$$y_h = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$
Vi letar efter den lösning som tangerar $y = e^x$ vid $x = 0$ eller, med andra ord, som uppfyller två krav: $y_h(0) = e^0 = 1$ samt $y_h'(0) = (e^x)'\,|_{x=0} = 1$. Sätter vi in dessa krav i y_h får vi $C_1 = 1$ samt
$$\begin{aligned} 1 &= y_h'(0) = [e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)]\,|_{x=0} = \\ &= C_1 + C_2, \end{aligned}$$
så att $C_2 = 0$. Vi får då att den sökta lösningen är
$$y(x) = e^x \cos x.$$

3. a) Eftersom $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ och $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ (obs, det räcker!) får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

b) För att tillämpa Maclaurin måste vi först göra variabelbytet $t = 1/x$. Vi får

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(x \cos\frac{1}{x} - x \right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\cos t - 1}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0_+} \frac{1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4) - 1}{t} = \lim_{t\to 0_+} \left(-\frac{1}{2}t + O(t^3) \right) = 0. \end{aligned}$$

4. a) Integralen löses lätt med hjälp av ett variabelbyte:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^7}}\, dx &= \begin{bmatrix} t = 1 + x^7 \\ x^6 dx = \frac{1}{7} dt \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{7} \int t^{-1/2}\, dt = \\ &= \frac{1}{7} \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{7}\sqrt{t} + C = \frac{2}{7}\sqrt{1+x^7} + C. \end{aligned}$$

b) Integralen är generaliserad i $+\infty$, vi räknar därför ut först en primitiv till integranden; det görs via partiell integration (2 ggr):

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x}\, dx \overset{\text{P.I.}}{=} \begin{bmatrix} f = x^2 & g' = e^{-x} \\ f' = 2x & g = -e^{-x} \end{bmatrix} &= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\, dx = \\ \overset{\text{P.I.}}{=} \begin{bmatrix} f = x & g' = e^{-x} \\ f' = 1 & g = -e^{-x} \end{bmatrix} &= -x^2 e^{-x} + 2\,(\S) = \\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = \\ &= -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C. \end{aligned}$$

Således

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) \right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}(b^2 + 2b + 2) + 2 \right) = 2.$$

5. Den sökta volymen är (enligt formeln på sid. 327 i boken)

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \pi \left[\tan x\right]_0^{\pi/4} = \pi.$$

6. Den sökta arean ges av formeln (se sid. 319 i boken)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} h^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Observera att områdets rand, dvs. kurvan $r = \cos\varphi$, är en halvcirkel med radien $\frac{1}{2}$ och mittpunkten i $(0,0)$ så att området ifråga är en halvskiva med radien $\frac{1}{2}$ som således har arean $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$, vilket stämmer med beräkningen ovan.

7. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 290.

b) Vi deriverar sambandet

$$y(x) = 3x - \int_0^x y(t)\,dt. \tag{3}$$

med hjälp av analysens huvudsats och får

$$y' = 3 - y \tag{4}$$

dvs en enkel separabel differentialekvation. Separerar vi variabler i (4) får vi (obs: vi måste nu kräva att $y \neq 3$ medan vi ser att $y = 3$ är också en lösning till ekvationen)

$$\frac{dy}{3-y} = dx$$

och integration leder till

$$-\ln|3-y| = x + C$$

eller

$$|3-y| = e^{-x-C} = De^{-x}$$

där $D = e^{-C} > 0$. Slopar vi beloppet får vi $3 - y = De^{-x}$ med $D \in \mathbf{R}$ eller

$$y(x) = 3 - De^{-x} \tag{5}$$

som är alltså den allmänna lösningmängden till (4). Observera att även lösningen $y(x) = 3$ ligger i (5) (för $D = 0$). Notera också att ekvationen (4) kan även lösas med hjälp av integrerande faktor. Resultat är naturligtvis densamma dvs (5). Vidare, ur sambandet (3) får vi $y(0) = 0 - \int_0^0 y(t)dt = 0$ vilket insatt i (5) ger $0 = 3 - De^{-0}$ dvs $D = 3$. Således, den sökta funktionen är $y(x) = 3(1 - e^{-x})$.