Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i linjär algebra TNIU 75 för BI2, SL2

2009-09-18 kl. 8.00—10.00

1. Vi vet att $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. En enkel uträkning visar att i vårt fall $AB = E$, så att $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = E^{-1} = E$, ty enhetsmatrisen är förstås lika med sin egen invers. Använder man inte faktum att $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ kan man naturligtvis uträkna först A^{-1} och se att $A^{-1} = B$ varför $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}B = E$. Inser man inte det får man även räkna ut B^{-1} och multiplicera till sist B^{-1} med A^{-1} men det tar mycket längre tid. Tanklösa uträkningar lönar sig inte!

2. Vektorerna
$$\vec{f}_1 = (1, 2, -5), \quad \vec{f}_2 = (2, 1, 2), \quad \vec{f}_3 = (4, -1, 16)$$
är linjärt beroende då och endast då ekvationen
$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{0}$$
som mer explicit kan skrivas såhär:
$$\lambda_1 (1, 2, -5) + \lambda_2 (2, 1, 2) + \lambda_3 (4, -1, 16) = (0, 0, 0)$$
har en icke-trivial lösning för λ_i, vilket leder till ekvationssystemet
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 16\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
vars lösning (Gauss igen) är (visa det) enparametrisk: $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = -3t$, $\lambda_3 = t$ så att vektorerna är linjärt beroende och uppgiften är avslutad. Vi ser alltså (det behövde ni inte göra men det är bra att förstå det) att
$$2t\vec{f}_1 - 3t\vec{f}_2 + t\vec{f}_3 = \vec{0}$$
för varje reel t så att (genom att ta $t = 1$) hittar vi följande samband mellan våra vektorer:
$$2\vec{f}_1 - 3\vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0}$$
vilket klart och tydligt visar att alla tre ligger i ett och samma plan.

3. a) Eftersom e är en ON-bas vet vi att $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$. Det betyder att

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1 = \frac{1}{25}(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) \cdot (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = \frac{1}{25}(9\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + 24\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 16\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = 1$$

och på liknande sätt visar vi att $\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$ medan $\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_2 = 1$. Basen är alltså ON.

Alternativt, vi kan betrakta basbytematrisen T från basen e till basen f:

$$T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

och inse att T är ortogonal ty $T^t T = E$ (notera att här $T^t = T$ så att $T^2 = E$, matrisen är sin egen invers). Detta betyder (se Sats 4.3 sid 121 och dess bevis) att även f är ON.

b) Vektorn $\vec{u}$ har i basen e koordinater $(2, -9)$. Beräkna $\vec{u}$:s koordinater i basen f.

$\vec{u}$:s koordinater i basen f ges av kolonnvektor Y där

$$Y = T^{-1}X$$

där $X = (2, -9)^t$ är alltså kolonnvektor innehållande $\vec{u}$:s koordinater i basen e. Vi har dock redan konstaterat att för just denna matris är $T^{-1} = T$ så att

$$Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

så att $\vec{u} = -6\vec{f}_1 + 7\vec{f}_2$. Vi kontrollerar detta:

$$-6\vec{f}_1 + 7\vec{f}_2 = -\frac{6}{5}(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) + \frac{7}{5}(4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$$

och ser att allt stämmer.

4. a) Se Def. 4.1 sid. 111.

b) En triangel har hörn i punkterna $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (1, 3, 0)$ (givna här i någon ON-bas). Bestäm vinkeln vid hörnen A.

Betrakta vektorerna $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 4)$ samt $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$. Den sökta vinkeln α ges då av

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{0 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

så att $\alpha = \arccos(1/2) = \pi/3$.