Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL

2010-01-08 kl. 08.00—13.00

Jour: Krzysztof Marciniak, tel. 011-36 33 20. **Inga hjälpmedel är tillåtna.** Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n - 1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. *Kontrollera dina svar där det är möjligt!*

1. För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 18 \\ x + ay + 2z = 33 \end{cases}$$

exakt en lösning?

2. Beräkna volymen av den paralellepiped som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 2, -1)$ och $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0)$ (givna här i en ON-bas).

3. a) Ange matrisen för den ortogonala projektionen av rummet på planet $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ (givet här i en ON-bas). (2p)

   b) Ange projektionens samtliga egenvärden med tillhörande egenrum. (1p)

4. Låt $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ vara en bas i rymden och låt

$$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.$$

   a) Visa att vektorerna $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{f_3}$ utgör också en bas. (1.5p)

   b) Ett plan Π i rymden ges i basen $\mathbf{e}$ av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ange Π:s ekvation i basen $\mathbf{f}$. (1.5p)

5. a) Formulera dimensionssatsen. (1p)

   b) Ange nollrummet $N(F)$ och värderummet $V(F)$ för en linjär avbildning F som i en viss bas har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2p)

6. Ange en ON-bas av egenvektorer till en linjär avbildning F som i en viss ON-bas representeras av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Visa att om F och G är två linjära avbildningar av rummet som i en viss bas $\mathbf{e}$ representeras av matriserna A respektive B så har den sammansatta avbildningen $F \circ G$ matrisen AB.