Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till entamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL
2010-01-08 kl. 08.00—13.00
ver 2. framtagen 2010-10-16

1. Ekvationssystemet
$$\begin{cases} ax + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 18 \\ x + ay + 2z = 33 \end{cases}$$
kan lösas entydigt då och endast då determinanten av systemets matris är skild från noll (se Sats 5.11 sid. 144; högereldet spelar här alltså ingen roll). Systemets matris är
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$
Genom Sarrus eller Laplace finner vi att $\det A = -a^2 + 4a - 3$. Således, systemet har entydigt lösning så snart $-a^2 + 4a - 3 \neq 0$ dvs för alla a utom $a = 1$ och $a = 3$.

2. Volymen V av parralellepiped som spånns upp av vektorerna $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 2, -1)$ och $\overrightarrow{w} = (0, 1, 0)$ ges av absolutbelopp av determinanten vars rader (eller kolonner) består av vektorernas komponenter (se Sats 5.4 sid. 136 och Sats 5.4 sid. 137). Vi har alltså
$$\pm V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$
så att $V = 2$.

3. a) En normal till planet är $\overrightarrow{n} = (1, -1, 2)$. För att bestämma avbildningens matris (i den bakomliggande ON-basen som vi kan då beteckna med $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$) måste vi uträkna bilder av basvektorer. Låt P beteckna vår projektion. Vi har då
$$P(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} - \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \overrightarrow{n} = (1, 0, 0) - \frac{1}{6}(1, -1, 2) = \frac{1}{6}(5, 1, -2)$$
På samma sätt får vi
$$P(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} - \frac{\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \overrightarrow{n} = (0, 1, 0) + \frac{1}{6}(1, -1, 2) = \frac{1}{6}(1, 5, 2)$$
samt
$$P(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} - \frac{\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \overrightarrow{n} = (0, 0, 1) - \frac{2}{6}(1, -1, 2) = \frac{1}{6}(-2, 2, 2)$$
så att avbildningsmatrisen blir
$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(notera att matrisen är symmetrisk och det tack vare faktum att projektionen är ortogonal). Det är även bra att kolla att $A^2 = A$ eller åtminstone att det $A = 0$ (alla projektioner, inte enbart ortogonala, upfyller bägge dessa villkor).

b) Det är lätt att se att alla vektorer parallella med normalen $\overrightarrow{n}$ projiceras på nollvektorn. Således, linjen $t\overrightarrow{n} = t(1, -1, 2)$ utgör ett egenrum tillhörande egenvärdet $\lambda = 0$. Vidare, alla vektorer i projektionsplanet avbildas på sig själva så att projektionsplanet utgör ett egenrum med tillhörande egenvärde $\lambda = 1$. Det finns inga andra egenrum. Naturligtvis, allt detta kan uträknas genom den standarda proceduren, men i det här fallet *ser* vi lösningen och behöver således inte räkna någonting.

4. a) Vi måste kontrollera om vektorerna

$$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.$$

är linjärt oberoende. Det enklaste sättet att göra detta är att använda determinantkriteriet (se Sats 5.10 sid. 143). Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

vilket visar att vektorerna $\overrightarrow{f_i}$ är linjärt oberoende.

b) Notera att eftersom basen $\mathbf{e}$ inte sägs vara ON (så att vi kan inte heller uttala oss om basen $\mathbf{f}$ är ON eller ej) kan vi inte använda Π:s ekvation för att ta fram planets normalvektorer. Enklaste sättet att hitta Π:s ekvation i basen $\mathbf{f}$ är då att ta fram sambandet mellan gamla och nya koordinater och sätta in gamla koordinater som funktion av nya in i planets ekvation. Låt T beteckna basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$, dvs.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatsambandet mellan gamla och nya koordinater antar då formen

$$X = TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ -2y_1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

Det betyder att

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 - 2y_1 + 3y_1 - y_2 + y_3 = 2y_1 + 2y_3$$

så att Π:s ekvation i den nya basen blir $y_1 + y_3 = 0$.

5. a) Se boken, Sats 7.7 sid. 218).

b) Nollrummet $N(F)$ till F får vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ som i den aktuella basen antar formen $AX = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uträkning t.ex. m.h.a. Gauss ger då att $X = t(1, 1, 2)$ så att nollrummet är en linje (just $t(1, 1, 2)$) genom origo. Det betyder att värderummet $V(F)$ är - enligt satsen i a) - ett plan genom origo, som då spänns upp t.ex. av de två första kolonnerna i A dvs av vektorerna $\overrightarrow{u} = (3, 2, 4)$ och $\overrightarrow{v} = (-1, 0, -2)$. En normal till $V(F)$ är därför $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-4, 2, 2) = -2(2, -1, -1)$ så att $V(F)$:s ekvation (om vi bortser från den icke-väsentliga faktorn-2) blir $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Notera att $N(F)$ och $V(F)$ är ej ortogonala.

6. Notera att avbildningen är symmetrisk så att enligt spektralsatsen den sökta basen säkert finns. Proceduren är standard och jag skall inte presentera den här. Egenvärden är $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = -1$ med motsvarande egenrum $t(1, 1, 1)$, $t(1, 1, -2)$ respektive $t(1, -1, 0)$. Det betyder att en (det finns flera, närmare bestämt 2^3, om man bortser från omnumrering av vektorerna) ON-bas bestående av egenvektorer till F är

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\,, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

7. Se boken, beviset för Sats 7.4, sid. 206.