Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL

2009-10-16 kl. 08.00—13.00

1. Den sökta skärningen ges av lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

vilken kan fås t.ex. m.h.a. Gauss. Lösningen är den rätta linjen $l : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(-8, 1, 3)$ (där $t = z/3$ alltså).

2. a) Se boken, Definition 5.2 sid. 131.

b) Den sökta arean ges t.ex. av

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Men $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ medan $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 3)$ varav

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -5, -1)$$

där $\vec{e}_i$ är basvektorerna tillhörande vårt koordinatsystem. Således

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 25 + 1} = \frac{\sqrt{42}}{2} = \sqrt{\frac{21}{2}}.$$

3. a) Vektorerna

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

utgör en ny bas i rummet precis då om de är linjärt oberoende. Vi kan då t.ex. lösa ekvationen

$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{0}$$

m.a.p. λ_i och se att det finns bara den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ett snabbare sätt är dock att använda sig av determinantkriteriet på sid. 143 (Sats 5.10). Vi bildar alltså matrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

och noterar att $\det T = 1 \neq 0$ så att enligt Sats 5.10. är $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ linjärt oberoende.

b) Basbytematrisen från basen **e** till **f** ges av matrisen T ovan.

c) Enligt Sats 3.5 (sid. 104) så ges $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen **e** av formeln "gamla = T ggr nya" dvs. av kolonnmatrisen

$$X = TY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att $\overrightarrow{u} = (-1, -5, 1)$ i basen **e**. Vi kontrollerar detta:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}_1 - 2\overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3 - 2\left(\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2\right) = -\overrightarrow{e}_1 - 5\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3$$

så att resultatet stämmer.

4. Linjerna

$$l_1 : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(1, 3, 0) \quad \text{och} \quad l_2 : (x, y, z) = (-1, 0, 3) + s(2, 6, 0)$$

är parallella då deras riktningsvektorer $\overrightarrow{v}_1 = (1, 3, 0)$ och $\overrightarrow{v}_2 = (2, 6, 0)$ är parallella ty $\overrightarrow{v}_2 = 2\overrightarrow{v}_1$. Ta en punkt på linjen l_1, säg $S_1 = (1, 0, -1)$, och betrakta planet Π som är ortogonal till l_1 (och således även till l_2) och som går genom S_1. Planets ekvation måste vara $x + 3y + D = 0$ och eftersom $S_1 \in \Pi$ får vi att $D = -1$. Således, Π:s ekvation är

$$x + 3y - 1 = 0.$$

Det sökta avståndet d (may the force be with you now) är lika med avståndet från S_1 till skärningspunkten S_2 mellan l_2 och Π. Vi hittar lätt att $S_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 3\right)$ (notera att $S_2 \in \Pi$) så att

$$d = \left|\overrightarrow{S_1 S_2}\right| = \left|\left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, \frac{20}{5}\right)\right| = \frac{1}{5}\sqrt{81 + 9 + 400} = \frac{1}{5}\sqrt{490} = \frac{7\sqrt{10}}{5}.$$

5. a) Vi visar lätt att $AA^t = E$ (så att avbildningen är en isometri) och att dessutom $\det A = 1$ så att avbildningen enligt Eulers sats om isometriska avbildningar är ren rotation.

b) Rotationsaxeln hittar vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ som i basen **e** har formen $AX = X$ eller $(A - E)X = 0$ vilket ger

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vars lösning är

$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 0)$$

Rotationsaxeln är alltså x-axeln vilket kan också åskådas med dina inre krafter (use the force igen). Rotationsvinkeln får vi om vi roterar en vektor i rotationsplanet $x_1 = 0$ (dvs. i x-y planet), säg $\overrightarrow{f} = (0, 1, 0)$ (den pekar längs y-axeln). Den roterade vektorn $F(\overrightarrow{f})$ ges då av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rotationsvinkeln a är nu lika med vinkeln mellan $\overrightarrow{f}$ och $F(\overrightarrow{f})$ och ges alltså av

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{f} \cdot F(\overrightarrow{f})}{\left|\overrightarrow{f}\right| \left|F(\overrightarrow{f})\right|} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} = 30°.$$

Notera att eftersom $\left|\overrightarrow{f}\right| = 1$ så är $\left|F(\overrightarrow{f})\right| = 1$ ty F är en isometri.

6. Den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ antar formen $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$ och har tre enkla reella lösningar $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Samtliga egenvektorer tillhörande egenvärdet λ_1 får vi ur ekvationen $(A - \lambda_1 E)X = 0$ som har formen

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Löser vi denna ekvation (t.ex. via Gauss) får vi att egenrummet tillhörande λ_1 (dvs. samtliga egenvektorer tillhörande λ_1) är endimensionell (ty lösningen är 1-parametrisk) och spänns upp av vektorn $\overrightarrow{u}_1 = (0, -1, 1)$ (dvs. är en rätt linje genom origo och med $\overrightarrow{u}_1$ som riktingsvektor).

På samma sätt hittar vi att egenrummet tillhörande λ_2 är också endimensionell och spänns upp av vektorn $\overrightarrow{u}_2 = (1, 0, 1)$ medan egenrummet tillhörande λ_3 spänns upp av $\overrightarrow{u}_3 = (1, 0, 0)$. Notera alltså att vektorerna $\overrightarrow{u}_i$ utgör en bas av egenvektorer, dock ej ON (inte ens ortogonal).

Vi kan till sist kontrollera t.ex. att $\overrightarrow{u}_3 = (1, 0, 0)$ verkligen är en egenvektor av F tillhörande $\lambda_3 = 2$ genom att uträkna $F(\overrightarrow{u}_3)$ i vår underliggande bas vilket ger

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så att $F(\overrightarrow{u}_3) = 2\overrightarrow{u}_3$. På samma sätt kan vi kolla att $F(\overrightarrow{u}_1) = -\overrightarrow{u}_1$ och att $F(\overrightarrow{u}_2) = \overrightarrow{u}_2$.

7. Antag att $\overrightarrow{u} \in N(F)$. Det betyder att $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ och således att $F(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$ för alla vektorer $\overrightarrow{v}$ i rummet. Men F är symmetrisk så att det betyder även att $\overrightarrow{u} \cdot F(\overrightarrow{v}) = 0$ för alla $\overrightarrow{v}$, och eftersom alla $F(\overrightarrow{v})$ konstituerar $V(F)$ så är $\overrightarrow{u}$ ortogonal mot samtliga vektorer i $V(F)$.