Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL
2010-08-20 kl. 08.00—13.00

1. De sökta punkternas koordinater måste uppfylla ekvation av varje plan, således, de måste uppfylla ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$
som har entydig lösning (Gauss) $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Således, det finns bara en sådan punkt (alla tre plan har en gemensam skärningspunkt).

2. a) En (kvadratisk) matris B kallas inversen (eller den inversa matrisen) till en kvadratisk matris A om $AB = BA = E$. Matrisen B betecknas då med A^{-1}.

   b) Antag att A har två inverser B och B' dvs att både $AB = BA = E$ och $AB' = B'A = E$ gäller. Vi har då
$$B' = B'E = B'AB = EB = B$$
   så att $B' = B$. Som ni ser vilar beviset på det faktum att matrismultiplikation är associativ dvs att $A(BC) = (AB)C$ (om alla produkter existerar).

   c) Uträkning med Gauss visar att
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} & \frac{b^2}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

3. a) Se boken (Def. 4.1 sid. 111).

   b) Beteckna vinklarna vid hörnen A, B och C respektive med α, β och γ. Vi har
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1, -2, 0)\cdot(1, 3, 0)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\sqrt{\frac{5}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
   vilket ger
$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi.$$
   På samma sätt
$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-1, 2, 0)\cdot(0, 5, 0)}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
   så att
$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Till sist:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-1,-3,0)\cdot(0,-5,0)}{5\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

så att

$$\gamma = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

4. Den sökta vinkeln α är naturligtvis lika med vinkeln mellan de ortogonala projektionerna $P(\vec{v}_1)$ samt $P(\vec{v}_2)$ av linjernas riktningsvektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ på det givna planet (ifall den är spetsig annars tar vi dess komplement till π). Vi behöver således ej att explicit beräkna dessa projicerade linjer, ännu mindre deras skärningspunkt! En normal till planet är $\vec{n} = (1,-1,-1)$ medan $\vec{v}_1 = (-2,3,1)$ samt $\vec{v}_2 = (1,3,1)$. Vidare, enligt projektionsformeln

$$\begin{aligned}
P(\vec{v}_1) &= \vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = (-2,3,1) - \frac{-6}{3}(1,-1,-1) = (-2,3,1) + 2(1,-1,-1) = (0,1,-1)\\
P(\vec{v}_2) &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = (1,3,1) - \frac{-3}{3}(1,-1,-1) = (1,3,1) + (1,-1,-1) = (2,2,0)
\end{aligned}$$

Den sökta vinkeln ges alltså av

$$\cos\alpha = \frac{P(\vec{v}_1)\cdot P(\vec{v}_2)}{|P(\vec{v}_1)||P(\vec{v}_2)|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}.$$

Således, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ (den är spetsig så den är OK).

5. Basbytematrisen från basen $\vec{e}$ till basen $\vec{f}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

och har inversen

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Således, $\vec{u}$:s koordinater i den nya basen blir

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\\ 5\\ 4 \end{pmatrix},$$

vilket betyder att $\vec{u} = -3\vec{f}_1 + 5\vec{f}_2 + 4\vec{f}_3$. Det är lätt att kontrollera:

$$-3\vec{f}_1 + 5\vec{f}_2 + 4\vec{f}_3 = -3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 5(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + 4(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \vec{u}.$$

6. a) Vi börjar med projektionen P. Vi beräknar projektionen av basvektorn $\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{n} = (2,-1,1)$ är en normal till planet.

$$\begin{aligned}
P(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 - \frac{\vec{e}_1\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = (1,0,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) =\\
&= (1,0,0) - \frac{2}{6}(2,-1,1) = \frac{1}{6}(2,2,-2)
\end{aligned}$$

P.s.s.

$$
\begin{aligned}
P(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 - \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = (0,1,0) - \frac{(0,1,0)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) = \\
&= (0,1,0) + \frac{1}{6}(2,-1,1) = \frac{1}{6}(2,5,1)
\end{aligned}
$$

samt

$$
\begin{aligned}
P(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 - \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = (0,0,1) - \frac{(0,0,1)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) = \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{6}(2,-1,1) = \frac{1}{6}(-2,1,5)
\end{aligned}
$$

Således, projektionsmatrisen (vars *kolonner* består av $P(\vec{e}_i)$) ges av

$$
A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

Vi bestämmer nu matrisen B för speglingen S.

$$
\begin{aligned}
S(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 - 2\frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = (1,0,0) - 2\frac{(1,0,0)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) = \\
&= (1,0,0) - \frac{2}{3}(2,-1,1) = \frac{1}{3}(-1,2,-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 - 2\frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = (0,1,0) - 2\frac{(0,1,0)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) = \\
&= (0,1,0) + \frac{1}{3}(2,-1,1) = \frac{1}{3}(2,2,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 - 2\frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = (0,0,1) - 2\frac{(0,0,1)\cdot(2,-1,1)}{(2,-1,1)\cdot(2,-1,1)}(2,-1,1) = \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{3}(2,-1,1) = \frac{1}{3}(-2,1,2)
\end{aligned}
$$

så att speglingsmatrisen (vars kolonner består av $S(\vec{e}_i)$) blir

$$
B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

b) Naturligtvis (close your eyes, Luke!) $S \circ P = P$, $P \circ S = P$, $P \circ P = P$ (så att alla motsvarande matriser är lika med A) medan $S \circ S = I$ (identitetsavbildning) så att dess matris är E. Man behöver alltså inte uträkna matrisprodukter här.

7. a) Den karakteristiska ekvationen har formen $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ med två skilda reella rötter $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$. Samtliga egenvektorer som tillhör λ_1 får vi genom att lösa ekvationen $(A - \lambda_1 E)X = 0$ som antar formen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och har lösningen $(x_1, x_2) = t(-2, 1)$. På samma sätt kollar vi lätt att samtliga egenvektorer som tillhör egenvärdet λ_2 har formen $t(1, 1)$. Således en (bland många) bas bestående av egenvektorer till A är $\vec{f}_1 = (-2, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1)$ (lätt att kolla att dessa är egenvektorer, gör det!).

b) Vi kollar lätt att $A^2 - 4A - 5E = 0$ (2×2 nollmatrisen). Det är ingen slump: varje kvadratisk matris uppfyller sin egen karakteristisk ekvation (detta är innebörden i en sk Cayley-Hamiltonsast, se boken sid. 344 eller andra böcker för mer detaljer kring denna intressanta sats).