Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL
2009-10-16 kl. 08.00—13.00

Jour: Krzysztof Marciniak, tel. 011-36 33 20. **Inga hjälpmedel är tillåtna.** Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n - 1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. *Kontrollera dina svar där det är möjligt!*

1. Bestäm skärningen mellan (dvs. de punkter som är gemensamma för) planen: $x+2y+2z = 2$ och $x - y + 3z = -1$.

2. a) Definiera begreppet *vektorprodukt av två vektorer.* (1p)

   b) En triangel har hörn i punkterna $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 2, -1)$ samt $C = (2, 2, 3)$ (givna här i ett ortonormerat koordinatsystem). Beräkna triangelns area. (2p)

3. Låt $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ vara en bas i rummet. Låt även

$$\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_2 = 2\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2.$$

   a) Visa att vektorerna $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ utgör en ny bas i rummet. (1p)

   b) Ange basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$. (1p)

   c) En vektor $\overrightarrow{u}$ har koordinater $(1, 0, -2)$ i basen $\mathbf{f}$. Ange dess koordinater i basen $\mathbf{e}$. (1p)

4. Beräkna avståndet mellan linjerna

$$l_1 : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(1, 3, 0) \quad \text{och} \quad l_2 : (x, y, z) = (-1, 0, 3) + s(2, 6, 0)$$

   (givna här i ett ortonormerat koordinatsystem).

5. En linjär avbildning i en ON-bas $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

   a) Visa att avbildningen är en rotation. (1p)

   b) Ange rotationsaxeln och rotationsvinkeln. (1+1p)

6. Bestäm alla egenvärden och alla egenvektorer till en avbildning som i en viss bas ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Visa att om F är en symmetrisk linjär avbildning så är dess nollrum $N(F)$ och dess värderum $V(F)$ ortogonala mot varandra i den mening att varje vektor i $N(F)$ är då ortogonal mot samtliga vektorer ur $V(F)$.