Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i linjär algebra TNIU 75

för BI2, SL2

2010-09-27 kl. 8.00—10.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

kan lösas t.ex. genom Gaussian elimination. Genom att multiplicera den första ekvationen med -2 och addera till den andra samt multiplicera den första med -1 och addera till den tredje får vi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Genom att multiplicera den andra ekvationen i det sista systemet med 3 och addera till den tredje får vi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Ur detta kan vi lätt avläsa systemets lösning. Vi kan välja t.ex. x_4 som parameter: $x_4 = t \in \mathbf{R}$ och då får vi: $x_3 = 1 + t$, $x_2 = x_4 = t$, $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3t$.

2. a) Beräkning visar att $\det A = -1 \neq 0$ oberoende av värdet på k. Det betyder (Sats 5.11 sid. 144) att matrisen A är alltid inverterbar, oavsett k.

   b) Inversen (räknad genom Sats 2.5 sid. 57 eller på annat sätt) blir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

   (kontrollera gärna detta genom att kolla att $A^{-1}A = E$).

3. a) Vi kan lätt uträkna att de båda vektorerna

$$\overrightarrow{f}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,(\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2)\,, \quad \overrightarrow{f}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{4+a^2}}\,(2\overrightarrow{e}_1 + a\,\overrightarrow{e}_2)\,.$$

   är rätt normerade dvs att $\left|\overrightarrow{f}_i\right| = \sqrt{\overrightarrow{f}_i \cdot \overrightarrow{f}_i} = 1$ för både $i = 1$ och $i = 2$. Ortogonalitetskravet $\overrightarrow{f}_1 \cdot \overrightarrow{f}_2 = 0$ ger

$$(\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2) \cdot (2\overrightarrow{e}_1 + a\overrightarrow{e}_2) = 0$$

(vi kan bortse från koefficinterna $\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\frac{1}{\sqrt{4+a^2}}$ eftersom $HL = 0$) eller $2 - 2a = 0$ som uppfylls enbart om $a = 1$.

b) Vi har nu alltså $a = 1$ och basen $\mathbf{f} = \left(\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2\right)$ bestående av

$$\overrightarrow{f}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2\right), \quad \overrightarrow{f}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2\right). \tag{1}$$

Basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{f}$ är således

$$T = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

och är ortogonal (dvs $T^{-1} = T^t$ ty båda baser är ortonormala /Sats 4.3 sid. 121/). Således, $\overrightarrow{u}$:s koordinater i den nya basen ges av (Sats 3.5 sid. 104)

$$Y = T^{-1}X = T^tX = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

så att

$$\overrightarrow{u} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-3\overrightarrow{f}_1 + 4\overrightarrow{f}_2\right). \tag{2}$$

Detta kan kontrolleras genom att sätta in formlerna (1) i HL av (2):

$$\tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-3\overrightarrow{f}_1 + 4\overrightarrow{f}_2\right) = \frac{1}{5}\left[-3\left(\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2\right) + 4\left(2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2\right)\right] = \frac{1}{5}\left(5\overrightarrow{e}_1 + 10\overrightarrow{e}_2\right) = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{u}.$$

4. Volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{u} = (1, -2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)$ samt $\overrightarrow{w} = (2, 3, -1)$ ges av absolutbeloppet av determinanten (se sid. 137)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

och är således lika med 3.