Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL

2010-10-18 kl. 14.00—19.00

1. En $2x2$ matris $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ kommuterar med matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ om $AX = XA$ dvs om

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 \\ -x_1 = x_3 - x_4 \\ -x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

vars lösning är två-parametrisk. Om vi sätter $x_3 = s$ och $x_4 = t$ får vi $x_1 = -s + t$ och $x_2 = -2s$. Det betyder att det finns en två-parametersfamilj av lösningar till problemet:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -sA + tE$$

där s, t är alltså godtyckliga parametrar. Resultatet är rimligt, eller hur?

2. a) Vi ser att skalärprodukten $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} = 0$ och dessutom att $\left|\overrightarrow{f_1}\right| = \left|\overrightarrow{f_1}\right| = 1$ så att $\overrightarrow{f_1}$ och $\overrightarrow{f_2}$ kan ingå i en och samma ON-bas (i.e. uppgiften är rimlig). Den tredje basvektorn får vi då genom att vektormultiplicera $\overrightarrow{f_1}$ och $\overrightarrow{f_2}$. Vi får alltså

$$\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\left(\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}\right)$$

och $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{f_3}$ utgör nu en höger ON-bas enligt definition av vektorprodukt.

b) Basbytematrisen från basen **e** till basen **f** är

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

och är ortogonal (i.e. $T^{-1} = T^t$) ty den är en basbytematris mellan två ON-baser (Sats 4.3 sid. 121). Således, vektorn $\overrightarrow{u}$ har i den nya basen koordinater (Sats 3.5 sid. 104)

$$Y = T^{-1}X = T^tX = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{6}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

så att $\overrightarrow{u} = \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{f_2} + \frac{6}{\sqrt{30}}\overrightarrow{f_3}$. Detta kan kontrolleras:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{f_2} + \frac{6}{\sqrt{30}}\overrightarrow{f_3} = \frac{2}{5}\left(2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}\right) + \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}\right) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$$

så att allt stämmer.

3. a) l är parallell med Π ty linjens riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 3)$ är ortogonal mot planets normalvektor $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$ (för att $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$).

   b) Notera att eftersom l är parallell med Π så är det sökta avståndet d lika med avståndet mellan en godtycklig punkt på linjen l och planet Π. För att beräkna avståndet mellan l och Π betraktar vi därför linjen $l' = (1, 2, 0) + s(1, -2, 1)$ som går genom $P = (1, 2, 0)$ (alltså en punkt på l) och som är ortogonal till planet Π. Denna linje skär planet i någon punkt S och det sökta avståndet ges då naturligtvis av $d = \left|\overrightarrow{PS}\right|$. Skärningspunkten S får vi om vi sätter in l':s ekvation i planet Π (jfr Exempel 18 sid. 181). Vi får då

$$1 + s - 2(2 - 2s) + s = 3$$

   vilket ger $s = 1$. Således, $S = (2, 0, 1)$ och då $\overrightarrow{PS} = (1, -2, 1)$ så att $d = \left|\overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{6}$. Man kan även säga att $d = |s|\,|\overrightarrow{n}| = \sqrt{6}$ (enl. sträckan = tid gånger hastighet) (S behöver ej uträknas).

4. Vi måste beräkna bilder av basvektorerna $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$ etc. under denna avbildning. Avbildningen är projektion på en linje dvs projektion på denna linjes riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (1, 1, -1)$ varför projektionsformeln är lämplig. Vi räknar direkt:

$$\begin{aligned}
P(\overrightarrow{e_1}) &= \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(1, 1, -1) \\
P(\overrightarrow{e_2}) &= \frac{\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(1, 1, -1) \\
P(\overrightarrow{e_3}) &= \frac{\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{v} = \frac{1}{3}(-1, -1, 1)
\end{aligned}$$

   så att avbildningsmatrisen antar formen

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. a) Se boken, Sats 7.7 sid. 218.

   b) Nollrummet $N(F)$ får vi om vi löser ekvationen $F(\overrightarrow{u}) = 0$ som i vår bas ges av $AX = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   dvs

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

   och vi ser lätt att ekvationer 2 och 3 är bara multiplar av ekvation 1. Således, nollrummet utgörs av alla vektorer som uppfyller sambandet $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ som är ett plan genom

origo med en normalvektor $(1,-2,-1)$. Dimensionssatsen säger då att värderummet är en linje genom origo som spänns då upp t.ex. av den första av A:s kolonner, så att $V(F) = \{t(1,-2,4) : t \in \mathbf{R}\}$. Notera att $N(F)$ och $V(F)$ inte är ortogonala här. Notera även att det syns direkt att $\dim V(F) = 1$ ty kolonn 2 i $A = -2$ ggr kolonn 1 medan kolonn 3 i $A = -$kolonn 1.

6. a) Uträkning (gör den) visar att $AA^t = E$ och att $\det E = +1$ så att avbildningen - enligt Eulers sats om isometriska avbildningar av rummet (Sats 7.10 sid. 225) - är en rotation.

   b) Rotationsaxeln hittar vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ eller, i basen, $AX = X$ dvs $(A-E)X = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} 1-9 & -4 & 8 \\ 8 & 4-9 & 1 \\ -4 & 7 & 4-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (notera hur faktorn $\frac{1}{9}$ påverkar uträkningar) dvs

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ 8 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   vilket har 1-parameterlösning $(x_1, x_2, x_3) = t(1,2,2)$ som ger den sökta rotationsaxeln. Till sist, rotationsvinkeln α får vi genom att ta en vektor i rotationsplanet (det plan genom origo som är ortogonal mot rotationsaxeln dvs i det här fallet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$) t.ex. $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$ och beräkna vinkeln mellan $\overrightarrow{u}$ och $F(\overrightarrow{u})$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot F(\overrightarrow{u})}{|\overrightarrow{u}|\,|F(\overrightarrow{u})|}$$

   Notera nu att $|F(\overrightarrow{u})| = 1$ ty $|\overrightarrow{u}| = 1$ och för att rotation är en isometri. Vidare, $F(\overrightarrow{u})$ har koordinater

$$AX = \frac{1}{9\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$$

   så att $\overrightarrow{u} \cdot F(\overrightarrow{u}) = 0$ och vi ser direkt att rotationsvinkeln är $\pi/2$.

7. Vi börjar med att lösa den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ eller

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

   dvs

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

   vilket har en dubbelrot $\lambda_{1,2} = 1$. Motsvarande egenrum hittar vi genom att lösa ekvationen $(A - \lambda_{1,2}E)X = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   som har 1-parameterslösning $(x_1, x_2) = t(-1,1)$. Således här överstiger den algebraiska multipliciteten av egenvärdet $\lambda = 1$ dess geometriska multiplicitet och avbildningen är ej diagonaliserbar (det finns inte tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer).