Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL

2011-01-08 kl. 08.00—13.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{cases}$$

har icke-triviala lösningar då och endast då systemets determinant är lika med noll (se Sats 7.6 sid. 212, ekvivalens mellan (ix) och (x)). Med hjälp av Sarrus eller Laplace kollar vi att

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

så att systemet har icke-triviala lösningar. Alternativt kan vi helt enkelt lösa ut systemet med hjälp av Gauss. Vi får då en 1-parameterslösning $(x_1, x_2, x_3) = t(4, 0, 3)$.

2. a) Se boken, Def. 4.1 sid. 111.

   b) Eftersom

$$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + |\overrightarrow{v}|^2$$

   så ser vi att kravet $|\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2$ kan uppfyllas enbart om $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ vilket betyder att $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ är ortogonala.

3. Vi betecknar planet $2x - y + 3z = 7$ med Π_1 och planet $2x - y + 3z = -2$ med Π_2 medan det sökta planet kommer att kallas Π.

   Π_1 och Π_2 är förstås parallella ty de har samma normalvektor $\overrightarrow{n} = (2, -1, 3)$. Det sökta planet Π måste också vara parallell med både Π_1 och Π_2 så det måsta ha ekvationen $2x - y + 3z = D$ där alltså bara konstanten D återstår att hitta. För att hitta denna konstant behöver vi en punkt tillhörande Π. För att göra detta drar vi en godtycklig sträcka från Π_1 mot Π_2. Mittpunkten på sträckan tillhör då det sökta planet Π (use your force, Luke). Vi väljer då en punkt på Π_1, säg $P_1 = (2, 0, 1)$ och en punkt på Π_2, säg $P_2 = (0, 2, 0)$. Mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{P_1P_2}$ är då $M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ som alltså tillhör Π. Sätter vi in M i Π:s ekvation får vi $2 - 1 + \frac{3}{2} = D$ så att $D = \frac{5}{2}$. Det sökta planet Π ges alltså av $2x - y + 3z = \frac{5}{2}$. Studenten själv uppmanas att pröva andra kombinationer av P_1, P_2 tillhörande Π_1 resp. Π_2 för att kontrollera att D är OK.

4. a) För att hitta avbildningsmatrisen behöver vi uträkna bilder av samtliga basvektorer. Vi börjar med $S(\overrightarrow{e_1})$:

$$S(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} - 2\frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (1, 0, 0) - 2\frac{1}{11}(1, -1, 3) = \frac{1}{11}\left[(11, 0, 0) + (-2, 2, -6)\right] = \frac{1}{11}(9, 2, -6).$$

där $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$ och där $\overrightarrow{n} = (1,-1,3)$ är en vektor normal till planet. På samma sätt får vi $S(\overrightarrow{e_2})$ samt $S(\overrightarrow{e_3})$:

$$S(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} - 2\frac{\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (0,1,0) - 2\frac{-1}{11}(1,-1,3) = \frac{1}{11}\left[(0,11,0)+(2,-2,6)\right] = \frac{1}{11}(2,9,6).$$

$$S(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} - 2\frac{\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (0,0,1) - 2\frac{3}{11}(1,-1,3) = \frac{1}{11}\left[(0,0,11)+(-6,6,-18)\right] = \frac{1}{11}(-6,6,-7).$$

så att den sökta avbildningsmatrisen är

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Kontroll kan (och skall!) göras på flera sätt. Dels kan man kontrollera att $\det A = -1$ (spegling ändrar ej volym, men orientering, se Sats 7.3 sid. 205 och efterföljande text i boken), dels att $A^2 = E$ (som motsvarar det faktum att $S \circ S$ är en identitetsavbildning), dels kan man titta på bilden av normalen $\overrightarrow{n} = (1,-1,3)$:

$$AX = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

så att $S(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$ som det skall vara. Man kan även ta en vektor i spegelplanet $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ t.ex. $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ och kolla att $S(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ etc.

b) Man kan naturligtvis gå den tråkiga vägen med bestämmande av egenvärden och sedan egenvektorer men egentligen räcker det med vår geometriska intuition. Alla vektorer liggande i spegelplanet $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ är egenvektorer tillhörande egenvärde $\lambda_1 = 1$ (ty för alla vektorer i spegelplanet gäller att $S(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$) medan alla vektorer parallella med normalen $\overrightarrow{n}$ är egenvektorer tillhörande egenvärde $\lambda_2 = -1$ ty för dessa vektorer har vi $S(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ då $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{n}$ och $S(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$.

5. Då det är svårt att hitta bilder $R(\overrightarrow{e_i})$ av basvektorerna $\overrightarrow{e_i}$ direkt kommer vi att utföra ett basbyte till en höger ON-bas som är anpassad till vår uppgift. Vi inför alltså en ny höger ON-bas

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{f_1}\times\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

där $\overrightarrow{f_1}$ pekar längst rotationsaxeln (så att $R(\overrightarrow{f_1}) = \overrightarrow{f_1}$) medan $\overrightarrow{f_2}$ och $\overrightarrow{f_3}$ ligger i rotationsplanet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och således (se uppgiften, use the force Luke, det är lätt att välja fel tecken här) $R(\overrightarrow{f_2}) = \overrightarrow{f_3}$ medan $R(\overrightarrow{f_3}) = -\overrightarrow{f_2}$. Det betyder att avbildningen har i basen $\mathbf{f}$ matrisen

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

medan basbytematrisen från $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$ är

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Vi vet även att $A_f = T^{-1}A_eT$ där A_e är den sökta matrisen (R:s matris i basen $\mathbf{e}$) så att $A_e = TA_fT^{-1} = TA_fT^t$ där vi alltså utnyttjar att T är ortogonal ty båda baser är ON. Vi får till sist

$$A_e = TA_fT^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Det är möjligt att kontrollera att det $A_e = 1$ (rotation ändrar varken volym eller orientering). Dessutom kan man kontrollera att

$$A_e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att rotationen rör ej vektorn $(1,1,1)$ som är ju parallell med rotationsaxeln.

6. a) Se boken, Sats 7.7 sid. 218

   b) Vi ser att dimensionen av värderummet för F är minst 2, ty den första och den sista kolonnerna i A är linjärt oberoende. Således, enligt dimensionssatsen, $\dim(N(F))$ kan ej överstiga 1. Å andra sidan, så snart $\det(A)$ är skild från noll består nollrummet bara av nollvektorn. Vi konstaterar att $\dim(N(F))$ blir 1 enbart då $\det(A) = 0$, vilket händer endast då $\alpha + 7 = 0$ dvs då $\alpha = -7$.

7. Notera att matrisen är symmetrisk (och basen är ON) så enligt spektralsatsen (Sats 8.2 sid. 239) kan man hitta en ON-bas av egenvektorer till avbildningen. Proceduren är standard så jag anger här enbart viktigaste delresultat. Den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ antar formen $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98 = 0$. Egenvärden är då $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_{2,3} = 7$ (dubbelrot). En (normerad) egenvektor tillhörande λ_1 är då $\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ och egentligen det räcker för att få den sökta basen ty de två återstående basvektorer tillhör $\lambda_{2,3}$ och är således ortogonala mot $\overrightarrow{f_1}$ (Sats 8.1 sid. 237). Vi tar exempelvis $\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ som en normerad vektor ortogonal mot $\overrightarrow{f_1}$och då $\overrightarrow{f_3}$ kan tas som vektorprodukt av $\overrightarrow{f_1}$ och $\overrightarrow{f_2}$:

$$\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{f_1} \times \overrightarrow{f_2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-4,-1).$$

   för då blir automatiskt $\overrightarrow{f_3} \cdot \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f_3} \cdot \overrightarrow{f_2} = 0$ och $\left|\overrightarrow{f_3}\right| = \left|\overrightarrow{f_1}\right|\left|\overrightarrow{f_2}\right| \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Uppgiften har naturligtvis oändligt många ekvivalenta svar. Egenrummet tillhörande $\lambda_{1,2}$ är ju ett plan ortogonal mot $\overrightarrow{f_1}$ och där kan vi välja ON-bas på oändligt många sätt.