Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL

2011-08-19 kl. 08.00—13.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2ax_3 &= 11 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 111 \end{cases}$$

har entydig lösning då och endast då dess determinant är skild från noll (Sats 5.11 sid. 144). Högerledet påverkar förstås inte systemets lösbarhet. Vi räknar systemets determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} = -6a^2 - 6a + 12$$

som är noll då och endast då $-6a^2 - 6a + 12 = 0$ vilket inträffar bara för $a = -2$ och $a = 1$. För alla andra värden på a är alltså systemet entydigt lösbart.

2. a) Se Def. 4.1 sid. 111 resp. Def. 5.2 sid. 131.

b) Enligt Sats 5.4 sid. 136 och texten på sid. 137 blir den sökta produkten $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$ lika med determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -3.$$

Samma resultat får man förstås om man först räknar ut (på ett standard sätt) kryssprodukten $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ (den är lika med $(0, -1, 0)$) och sedan skalärmultiplicerar man resultatet med $\overrightarrow{w}$.

3. Vektorerna är - enligt uppgiften - linjärt beroende. Detta kan även kollas via determinantkriteriet (Sats 5.11 igen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Det betyder att det måste finnas tal α, β and γ sådana att $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ 2\alpha - 3\beta - 3\gamma &= 0 \\ -2\alpha + 3\beta + 3\gamma &= 0 \end{cases}$$

som har 1-parameterösning $(\alpha, \beta, \gamma) = t(3, -5, 7)$. Tar vi t.ex. $t = 1$ får vi

$$3\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v} + 7\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

vilket är det sökta sambandet (naturligtvis, varje nollskild multipel av detta duger också som svar).

4. Den sökta vinkeln α är naturligtvis lika med vinkeln mellan de ortogonala projektionerna $P(\overrightarrow{v}_1)$ samt $P(\overrightarrow{v}_2)$ av linjernas riktningsvektorer $\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{v}_2$ på det givna planet. Vi behöver således ej att explicit beräkna dessa projicerade linjer, ännu mindre deras skärningspunkt! En normal till planet är $\overrightarrow{n} = (1, -1, -1)$ medan $\overrightarrow{v}_1 = (-2, 3, 1)$ samt $\overrightarrow{v}_2 = (1, 3, 1)$. Vidare, enligt projektionsformeln

$$\begin{aligned} P(\overrightarrow{v}_1) &= \overrightarrow{v}_1 - \frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} = (-2,3,1) - \frac{-6}{3}(1,-1,-1) = (-2,3,1) + 2(1,-1,-1) = (0,1,-1) \\ P(\overrightarrow{v}_2) &= \overrightarrow{v}_2 - \frac{\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} = (1,3,1) - \frac{-3}{3}(1,-1,-1) = (1,3,1) + (1,-1,-1) = (2,2,0) \end{aligned}$$

Den sökta vinkeln ges alltså av

$$\cos\alpha = \frac{P(\overrightarrow{v}_1) \cdot P(\overrightarrow{v}_2)}{|P(\overrightarrow{v}_1)|\,|P(\overrightarrow{v}_2)|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}.$$

Således, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ (den är spetsig så den är OK, annars skulle vi behöva ta $\pi - \alpha$).

5. a) Utan att beräkna något ser man att projektionslinjen $(x, y, z) = t(1, 2, 3)$ är avbildningens värderum $V(F)$ medan planet $x+3y-2z = 0$ är avbildningens nollrum $N(F)$ (ty alla vektorer i planet och enbart dessa avbildas på nollvektorn). Inser man inte detta så får man istället mödosamt räkna ut avbildningsmatrisen och sen bestämma $N(F)$ och $V(F)$ utifrån denna matris.

   b) Låt oss beteckna linjens riktningsvektor $(1, 2, 3)$ med $\overrightarrow{v}$. Den projicerade vektorn $F(\overrightarrow{u})$ måste vara parallell med $\overrightarrow{v}$ så att $F(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{v}$ och det enda vi behöver bestämma är konstanten α. Vidare, skillnaden $\overrightarrow{u} - F(\overrightarrow{u})$ måste vara parallell med planet Π och således ortogonal mot planets normal $\overrightarrow{n} = (1, 3, -2)$. Detta ger villkoret $(\overrightarrow{u} - F(\overrightarrow{u})) \cdot \overrightarrow{n} = 0$ dvs

$$((2,3,4) - \alpha(1,2,3)) \cdot (1,3,-2) = 0$$

   eller

$$(2-\alpha, 3-2\alpha, 4-3\alpha) \cdot (1,3,-2) = 0$$

   eller

$$2 - \alpha + 9 - 6\alpha - 8 + 6\alpha = 0$$

   vilket ger $\alpha = 3$. Det betyder att $F(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{v} = 3(1,2,3) = (3,6,9)$.

6. a) Se Sats 7.10 sid. 225 i boken.

   b) Det är förvisso sant att $\det A = -1$ men

$$AA^t = \begin{pmatrix} 14 & -7 & 13 \\ -7 & 13 & -14 \\ 13 & -14 & 18 \end{pmatrix} \neq E$$

   så avbildningen ifråga inte är någon isometri.

7. a) Se boken (Sats 8.2, sid. 239).

   b) Avbildningen är symmetrisk (ty $A = A^t$) så den sökta ON-basen finns säkert enligt spektralsatsen. Vi börjar med egenvärden och löser den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(11-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 13\lambda - 14.$$

Dess rötter är $\lambda_1 = 14$ samt $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer får vi om vi löser matrisekvationerna $(A - \lambda_i E)X = 0$ vilket ger $\overrightarrow{v}_1 = (1, -2)$ och $v_2 = (2, 1)$ (de är ortogonala ty avbildningen är symmetrisk men de är ej normerade än). Normerar vi dessa egenvektorer får vi en ON-bas bestående av egenvektorer till F:

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \quad \overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$