Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i linjär algebra TNIU 75
för BI2, SL2, FL2

2011-09-23 kl. 8.00—10.00

1. Matrisinversen kan bestämmas antingen med hjälp av Gausselimination eller med den färdiga formeln på sid. 313 i boken (notera misstag i boken, det skall stå D_{kj} ej D_{jk}). Beräkningen är standard varför jag här anger bara resultatet:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(notera att vi brutit ut faktorn $\frac{1}{5}$ som dyker upp framför varje term i A^{-1}). En enkel kontroll visar att $AA^{-1} = E$.

2. a) Vektorerna $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ (med $k > 1$) sägs vara linjärt beroende om någon av dessa vektorer kan skrivas som en icke-trivial linjär kombination av de övriga (Def 3.3 sid. 95-96).

Alternativt kan man säga att vektorerna $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_k$ är linjärt beroende om det finns en icke trivial lösning $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ till vektorekvationen

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

b) Vi skriver ekvationen (1) för vektorer $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (2, 5, 1)$ och $\overrightarrow{w} = (1, 7, 2)$. Vi får

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(2, 5, 1) + \lambda_3(1, 7, 2) = (0, 0, 0)$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

som har en 1-parameterslösning: $\lambda_1 = 3t$, $\lambda_2 = -2t$, $\lambda_3 = t$ där $t \in \mathbf{R}$. Det betyder att vektorerna uppfyller för varje t sambandet $3t\overrightarrow{u} - 2t\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ som för t.ex. $t = 1$ ger

$$3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

vilket kan lätt kontrolleras om man sätter in vektorerna i sambandet ovan. Det betyder att vektorerna är linjärt beroende.

Alternativt, kan vi använda oss av determinantkriteriet (Sats 5.10 sid. 143): vi sätter in vektorernas koordinater i en determinant och får

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

vilket enligt kriteriet innebär att vektorerna är linjärt beroende.

3. Ett möjligt tillvägagångssätt här är att använda sambandet $Y = T^{-1}X$ där X och Y är $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen e respektive f (skrivna som kolonnmatriser) och där T är basbytematrisen från basen e till basen f. Sambandet mellan nya och gamla basvektorer ger att

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

som är exakt matrisen från uppgift 1 :-). Vi vet då inversen och får

$$Y = T^{-1}X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att $\overrightarrow{u} = \frac{1}{5}\overrightarrow{f}_1 + \frac{6}{5}\overrightarrow{f}_2 + \frac{2}{5}\overrightarrow{f}_3$. Vi kontrollerar resultatet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\overrightarrow{f}_1 + \frac{6}{5}\overrightarrow{f}_2 + \frac{2}{5}\overrightarrow{f}_3 &= \frac{1}{5}(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3) + \frac{6}{5}(2\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3) + \frac{2}{5}(2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) = \\ &= \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

vilket visar att våra uträkningar är OK.

4. a) Vi använder definitionen av skalärprodukt (Def. 4.1 sid. 111) samt Sats 4.2 (om skalärprodukt i en ON-bas) och får att

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

b) Den sökta arean A blir (enligt definition av vektorprodukt = Def. 5.2 sid. 131) lika med hälften av längden av vektorprodukten av $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ (se Figur 5.5 sid. 131) dvs. $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$. Vektorprodukten (som även kallas kryssprodukten) $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ får vi genom vår determinantformeln

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \pm\begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \pm(-1,-1,1)$$

där $\overrightarrow{e}_i$ är vektorer av den nämnda ON-basen och där $+$ gäller för en högerorienterad och $-$ för en vänsterorienterad bas (vi vet inge från uppgiften om basen är höger eller vänster, det påverkar dock ej resultatet ty $|-\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|$). Det betyder att den sökta arean blir

$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$