Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL, FTL
2011-10-18 kl. 08.00—13.00

1. Systemet kan lösas t.ex. m.h.a. Gausseliminationsmetoden. Med hjälp av den första ekvationen eliminerar vi x_1-termerna i de återstående ekvationerna. Resultatet blir

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\; x_2 \quad\quad\;\, - x_4 = 0 \\ \quad\; x_2 \quad\quad\;\, - x_4 = 0 \end{cases}$$

och vi ser att andra och tredje ekvationen är identiska så att vi kan bortse från en av dessa. Systemet har således en tvåparameterslösning och sätter vi t.ex. $x_3 = s$, $x_4 = t$ får vi $x_2 = x_4 = t$ och sedan $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -t - s - t = -2t - s$. Lösningen blir således $(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(-1, 0, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$.

2. Vi beräknar först en vektor normal (ortogonal) till planet. Det enklaste sättet att hitta en sådan vektor är att vektormultiplicera två godtyckliga vektorer som ligger i (är parallella med) planet Π varav som en av dessa vektorer kan vi ta linjens riktingsvektor $\overrightarrow{v}_1 = (1, 1, -2)$. En vektor till kan vi få genom att dra en sträcka från punkten $P = (1, 4, -2)$ till en godtycklig punkt på l, t.ex. $Q = (3, 2, 1)$ som fås från linjens ekvation om vi sätter $t = 0$ i den. Således, vektorn $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{PQ} = (2, -2, 3)$ ligger också i (är parallellt med) planet Π vilket ger en normalvektor

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1, -7, -4)$$

så att det sökta planet har ekvationen $-x - 7y - 4z + D' = 0$ eller $x + 7y + 4z + D = 0$ där $D = -D'$. Konstanten D får vi om vi sätter t.ex. P i planets ekvation. Vi får då $1 + 28 - 8 + D = 0$ eller $D = -21$. Således, det sökta planet är $x + 7y + 4z - 21 = 0$. Notera att både P och l ligger i detta plan: bägge uppfyller planets ekvation (kontrollera detta).

3. Projektionen l_p av linjen l på Π blir också en rät linje och dess riktningsvektor $\overrightarrow{v}_p$ kan fås som projektionen av linjen l:s riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 2)$ på planet Π. Detta ger

$$\overrightarrow{v}_p = P(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \overrightarrow{n} = (2, -3, 2) - \frac{-3}{3}(1, 1, -1) = (3, -2, 1).$$

där $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$ är en normal till planet. Linjerna l och l_p har en punkt S gemensam: skärningspunkten mellan l och Π. Den fås genom att sätta in l:s ekvation i Π:s ekvation:

$$(2 + 2t) + (1 - 3t) - (2t) = 0$$

vilket ger $t = 1$ och således $S = (4, -2, 2)$. Vi får alltså $l_p : (x, y, z) = (4, -2, 2) + s(3, -2, 1) = (4 + 3s, -2 - 2s, 2 + s)$. Vi kan även kontrollera svaret, genom att sätta in l_p:s ekvation i Π:s ekvation. Vi får

$$(4 + 3s) + (-2 - 2s) - (2 + s) = 0$$

vilket är uppfyllt identiskt med avseende på parametern s. Det betyder att alla l_p:s punkter ligger i Π.

4. Den sökta avbildningsmatrisen ges av formeln $A_f = T^{-1}A_eT$ där T är basbytematrisen från basen e till basen f:
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
Notera att den nya basen f är också ON (basen f uppstår genom att rotera basen e $\pi/4$ medurs) så att enligt Sats 7.9 är matrisen T ortogonal vilket betyder att $T^{-1} = T^t$. Vi får alltså
$$A_f = T^tA_eT = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

5. Vi kollar först att A är ortogonal: $AA^t = E$. Vidare, $\det(A) = 1$ så att avbildningen är en ren rotation. Det återstår att hitta rotationsaxeln samt rotationsvinkeln. Rotationsaxeln är en linje genom origo parallellt med en vektor $\overrightarrow{u}$ som uppfyller kravet $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ vilket översätts till matrisekvationen $AX = X$, dvs
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
Löser vi detta får vi 1-parameterslösningen
$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 1)$$
vilket är alltså den sökta rotationsaxeln. Betrakta nu en godtycklig vektor i rotationsplanet $x_1 + x_3 = 0$ (det plan som är ortogonal mot rotationsaxeln och som innehåller origo) , t.ex. $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$. Genom att rotera den får vi en vektor $F(\overrightarrow{v})$ som har koordinaterna
$$F(\overrightarrow{v}) \sim A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Rotationsvinkeln blir då lika med vinkeln mellan $\overrightarrow{v}$ och $F(\overrightarrow{v})$ och den fås ur formeln:
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot F(\overrightarrow{v})}{|\overrightarrow{v}|\,|F(\overrightarrow{v})|} = \frac{(0,1,0)\cdot\frac{1}{3}(-2,1,2)}{1\cdot 1} = \frac{1}{3},$$
(observera att både $\overrightarrow{v}$ och F($\overrightarrow{v}$) har längden 1 - avbildningen F är ju en rotation som är alltså isometri) som ger att $\alpha = \arccos(1/3)$ vilket är ungefär 70^{o}.

6. a) Se Sats 7.7 sid. 218.

   b) Nollrummet $N(P)$ av projektionen P består av alla vektorer som projiceras på nollvektor dvs av samtliga ortsvektorer ortogonala mot linjens riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (-1, 2, 1)$. Dessa vektorer bildar ett plan som är ortogonal mot vektorn $\overrightarrow{v}$ som är således planets normal. Planet går genom origo så dess (alltså nollrummets) ekvation är $-x + 2y + z = 0$. Vidare, värderummet $V(P)$ av projektionen P måste enligt dimensionssatsen (se satsen i a)) ha dimension 1 alltså det måste vara en linje genom origo. Det är en linje där bilder av alla vektorer hamnar och enligt uppgiften är detta linjen l så att $V(P) = l$.

   Alternativt kan man välja den långa vägen och räkna ut både $N(P)$ och $V(P)$ genom att först ta fram avbildningsmatrisen på ett standart sätt dvs. genom att hitta bilder av samtliga basvektorer.Vi får (notera att vi projicerar på en linje ej på ett plan)
$$P(\overrightarrow{e}_1) = \frac{\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{-1}{6}(-1, 2, 1) = \frac{1}{6}(1, -2, -1)$$

och vidare

$$P(\overrightarrow{e}_2) = \frac{\overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{2}{6}(-1,2,1), \quad P(\overrightarrow{e}_3) = \frac{\overrightarrow{e}_3 \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{1}{6}(-1,2,1)$$

Det betyder att matrisen A har formen

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Uträkningen kan kontrolleras genom att beräkna $\det A$ (skall vara 0) eller genom att uträkna att $A^2 = A$ (båda är egenskaper av varje projektion). Man kan nu bestämma nollrummet $N(P)$ genom att lösa ekvationen $AX = 0$ och vidare värderummet $V(P)$ ur A:s kolonner vilket leder efter några uträkningar till resultatet ovan.

7. a) Varje symmetrisk linjär avbildning i $\mathbf{R}^n$ har en ON-bas av dess egenvektorer (Se Sats 8.2 sid. 239).

b) Avbildningen är symmetrisk så spektralsatsen gäller och den sökta basen verkligen finns. Vi börjar med att fastställa matrisens egenvärden genom att ställa upp och lösa matrisens karakteristiska ekvation (sekularekvation som det heter i boken). Vi får

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

vilket kan faktoriseras till $-\lambda(\lambda-1)(\lambda-10) = 0$. Det betyder att avbildningen har tre skilda egenvärden: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 10$. Vi skall nu fastställa mostvarande egenrum. Egenrummet tillhörande $\lambda_1 = 0$ hittar vi genom att lösa matrisekvationen $(A - \lambda_1 E)X = 0$ eller $AX = 0$ vilket ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & 8x_2 & + 4x_3 & = 0 \\ & 4x_2 & + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

som har lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(0,1,-2)$ vilket är alltså egenrummet tillhörande λ_1. På motsvarande sätt hittar vi egenrum för λ_2 och λ_3. Resultatet blir $(x_1, x_2, x_3) = t(1,0,0)$ för λ_2 samt $(x_1, x_2, x_3) = t(0,2,1)$ för λ_3 (se dock anmärkningen nedan). Notera att dessa egenrum är parvis ortogonala vilket stämmer med Sats 8.1 sid. 237. Vi kan nu få den sökta ON-basen genom att välja en vektor ur varje egenrum (egenrum är ju ortogonala) och normera den. Vi får (t.ex.):

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2), \quad \overrightarrow{f}_2 = (1,0,0), \quad \overrightarrow{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$$

Kontroll: Vi kan lätt kontrollera att vektorerna $\overrightarrow{f}_i$ utgör en ON-bas (vi kollar att $\left|\overrightarrow{f}_i\right| = 1$ för $i = 1,2,3$ samt att $\overrightarrow{f}_i \cdot \overrightarrow{f}_j \neq 0$ för $i \neq j$). Vi kan även lätt kontrollera att dessa vektorer verkligen är avbildningens egenvektorer genom att visa att $F\left(\overrightarrow{f}_1\right) = \overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{0}$,

$F\left(\overrightarrow{f}_2\right) = \overrightarrow{f}_2$ och att $F\left(\overrightarrow{f}_3\right) = 10\overrightarrow{f}_3$. Vi visar t.ex. det mellersta sambandet:

$$F\left(\overrightarrow{f}_2\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \overrightarrow{f}_2$$

Anmärkning: pga ortogonalitet av egenvektorer tillhörande olika egenvärden (se sats 8.1 för symmetriska avbildningar) så kan vi räkna ut den tredje basvektor genom att vektormultiplicera $\overrightarrow{f}_1$ med $\overrightarrow{f}_2$ (vi får då $-\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$). Vi behöver alltså inte räkna ut det tredje egenrummet.