Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL, FTL
2012-01-09 kl. 08.00—13.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ y + az = a \end{cases}$$

löses med hjälp av Gausselimination. Genom att addera ekvation 1 multiplicerat med -1 till ekvation 2 får vi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ y + az = a \end{cases}$$

Vidare, genom att addera ekvation 2 multiplicerad mend -1 till ekvation 3 får vi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ (a-1)z = a-3 \end{cases}$$

Vi ser nu att ifall $a \neq 1$ kan vi räkna ut successivt först z, sen y och till sist x ur systemet. Vi får:

$$x = -2, \ \ y = \frac{2a}{a-1}, \ z = \frac{a-3}{a-1}$$

Ifall $a = 1$ antar den sista ekvationen formen $0 = -2$ som är omöjligt att uppfylla och i detta fall saknar alltså systemet lösningar.

2. a) En kvadratisk matris A är ortogonal om $A^{-1} = A^t$ d.v.s. om $AA^t = E$ (se Def. 4.4 sid. 120).

b) Direkt uträkning visar att

$$AA^t = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(b-1) \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(b-1) & 1 \end{pmatrix}$$

så att $AA^t = E$ om och endast om $b = 1$ och $a = \pm 1$.

c) Om $b = 1$ och $a = \pm 1$ har vi

$$A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

3. Den sökta vinkeln α är lika med $\alpha = \pi/2 - \beta$ där β är den spetsiga vinkeln mellan l:s riktningsvektorn $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ och planets normal $\overrightarrow{n} = (1,1,0)$ (notera att varken punkten $(3,2,1)$ på l eller konstanten D i planets ekvation påverkar svaret). Vi har då

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{n}|} = \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

så att $\cos\beta > 0$ vilket betyder att β är spetsig (så den är OK) och att $\beta = \pi/3$ och således får vi att $\alpha = \pi/2 - \beta = \pi/6$.

4. Man kan börja med att kontrollera att l_1 och l_2 verkligen ligger i ett och samma plan (det är dock inte en del av uppgiften utan man kan utgå från att detta är sant) genom att uträkna att l_1 och l_2 skär varandra i en punkt, nämligen $S = (13/5, -1/5, 3)$). Vi behöver först planets ekvation i normalform och vi börjar då med att hitta en vektor normal till planet. En sådan vektor får vi om vi vektormultiplicerar båda linjernas riktningsvektorer (ty dessa ligger i planet), så att

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (10, 5, -5) = 5(2, 1, -1)$$

(där $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ utgör den ON-bas uppgiften är skriven i) och faktorn 5 kan vi ignorera och istället ta $\overrightarrow{n} = (2,1,-1)$. Planet Π måste alltså ha formen $2x + y - z + D = 0$ och konstanten D kan vi få om vi sätter en punkt som tillhör planet i planets ekvation. En punkt som säkert sitter i Π är l_1:s "utgångspunkt" $(2,1,3)$ vilket ger $2\cdot 2 + 1 - 3 + D = 0$ vilket ger $D = -2$ (sätter vi in l_2:s "utgångspunkt" $(3,0,4)$ eller skärningspunkten S i ekvationen ovan får vi naturligtvis samma värde på D). Således, Π:s ekvation är $2x + y - z - 2 = 0$. För att nu hitta avståndet mellan origo $(0,0,0)$ och Π skickar vi en linje l_3 från origo ortogonal mot planet. Linjen l_3 måste då ha formen $(x,y,z) = (0,0,0) + t\overrightarrow{n} = t(2,1,-1)$. Denna linje skär Π då t_0 är sådan att punkten $t_0(2,1,-1)$ på l_3 uppfyller också Π:s ekvation dvs när

$$2\cdot 2t_0 + t_0 - (-t_0) - 2 = 0$$

vilket ger $t_0 = 1/3$. Det sökta avståndet blir då lika med

$$d = t_0\,|\overrightarrow{n}| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Det finns också en färdig formel för avståndet d mellan planet $Ax + By + Cz + D = 0$ och punkten (x_0, y_0, z_0):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

och sätter man i våra värden på A, B, C, D samt $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ får man

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

alltså samma sak.

5. Enligt Sats 7.4 sid. 207 får vi

$$\begin{aligned} F\circ G \quad &\sim \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ G\circ F \quad &\sim \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} \\ F\circ G - G\circ F \quad &\sim \quad AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -16 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Antag att den ursprungliga ON-basen heter e där $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Beteckna rotationen med R och dess matris i basen e (det som vi alltså letar efter) med A_e. Att direkt bestämma A_e genom att uträkna $R(\vec{e}_i)$ dvs. bilder av samtliga basvektorer är knepigt och vi skall därför först byta bas till en ON-bas $f = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ där rotationen har enkel form. Som den första basvektorn tar vi en normerad vektor parallell med rotationsaxeln, dvs

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

(skrivet i basen e) ty vi vet att då $R\left(\vec{f}_1\right) = \vec{f}_1$. Som $\vec{f}_2$ kan vi ta en vektor som ligger i rotationsplanet $x + z = 0$, t.ex.

$$\vec{f}_2 = (0,1,0)$$

och den tredje basvektor - eftersom den måste vara ortogonal både mot $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ tar vi som $\vec{f}_1 \times \vec{f}_2$:

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$$

(det är lätt att kolla att $\left|\vec{f}_i\right| = 1$ för alla i och att $\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = 0$ för $i \neq j$). Vi vet även att $R\left(\vec{f}_2\right) = \vec{f}_3$ samt att $R\left(\vec{f}_3\right) = -\vec{f}_2$ (eller tvärtom! Uppgiften preciserar inte åt vilket håll rummet roteras, så vi kunde lika gärna anta $R\left(\vec{f}_2\right) = -\vec{f}_3$ samt $R\left(\vec{f}_3\right) = \vec{f}_2$ men nu väljer vi den första teckenkombinationen). Det betyder att R:s matris i basen f har synnerligen enkel form:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och det betyder vidare (se Sats 7.8 sid. 220) att $A_e = TA_fT^{-1} = TA_fT^t$ där T är basbytematrisen från basen e till basen f (notera att basbytematrisen är ortogonal som en basbytematris mellan två ON-baser, se Sats 4.3 sid. 121, vilket betyder att $T^{-1} = T^t$) och har formen

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} A_e &= TA_fT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resultatet kan kontrolleras på olika sätt. Ett är att verka med A_e på $(1,0,1)$ som i basen e föreställer en vektor parallel med rotationsaxeln:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att denna vektor är invariant (i.e. rör sig inte) under avbildningen som det skall vara. En annan möjlighet att kontrollera resultatet är att beräkna $A_e A_e^T$ samt $\det(A_e)$ och det visar sig att $A_e A_e^T = E$ vilket visar att A_e beskriver en isometri och vidare att $\det(A_e) = +1$ vilket visar att A_e är en rotationsmatris. Man kan även verka med A_e på en godtycklig vektor i rotationsplanet (den roterade vektorn måste också då sitta i rotationsplanet).

7. a) Se boken, Sats 8.2 sid. 239.

   b) Beräkna A^{30} om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrisen A kan tolkas som en matris för en linjär avbildning av plan $\mathbf{R}^2$, given i en standard ON-bas $e = (e_1, e_2)$. Matrisen är symmetrisk så att det finns en ON-bas av egenvektorer till A. Vi börjar alltså med att hitta den. Genom att lösa den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ får vi två skilda reella egenvärden: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, med motsvarande egenvektorer $\overrightarrow{v}_1 = (-2, 1)$ respektive $\overrightarrow{v}_2 = (1, 2)$. De är - i överenskommelse med Sats 8.1 - ortogonala. Genom att normera dem får vi en ON-bas av $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till A:

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1), \quad \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2). \tag{1}$$

I den nya basen $f = (\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2)$ avbildningsmatrisen har en matris A_f som blir diagonal

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

med egenvärden på diagonalen (vet du varför?). Å andra sidan, vi vet från Sats 7.8 sid. 220 att $A_f = T^{-1}AT$, där T är basbytematrisen från basen e till basen f, som avläses direkt ur (1) ovan:

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Genom att multiplicera sambandet $A_f = T^{-1}AT$ med T från vänster och med T^{-1} från höger får vi $A = TA_fT^{-1}$. Ur detta följer att

$$A^{30} = \left(TA_fT^{-1}\right)^{30} = \underbrace{\left(TA_fT^{-1}\right)\left(TA_fT^{-1}\right)\ldots\left(TA_fT^{-1}\right)}_{\text{30 gånger}} = TA_f^{30}T^{-1}$$

Vidare, $T^{-1} = T^t = T$ ty T är både ortogonal och symmetrisk. Vi får alltså

$$A^{30} = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^{30} \end{pmatrix}T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 5^{29} & 2 \cdot 5^{29} \\ 2 \cdot 5^{29} & 4 \cdot 5^{29} \end{pmatrix} = 5^{29}A$$