Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL, FTL

2012-08-17 kl. 08.00—13.00

1. Eftersom $\det A = 2 \neq 0$ så är A inverterbar. Vi kan då multiplicera ekvationen med A^{-1} vänsterifrån och får
$$X + A = A^{-1}$$
och vi ser genast att ekvationen har entydig lösning
$$X = A^{-1} - A$$
Eftersom
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
får vi då att
$$X = A^{-1} - A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
Resultatet kan kontrolleras genom att sätta X i den ursprungliga ekvationen.
Det går också bra att helt enkelt ansätta att
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$
(den sökta matrisen X måste vara en 2×2 matris annars passar den inte i ekvationen), sätta in denna ansats i vårt matrissamband, få ett linjärt ekvationssystem för obekanta $x_1, \ldots, x_4$ och lösa det. Resultatet blir förstås samma som ovan.

2. Eftersom
$$\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_2, \quad \overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3 \tag{1}$$
så ar basbytematrisen från basen e till basen f lika med
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
och således ges $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen f av sambandet "nya $= T^{-1}\cdot$ gamla" eller
$$Y = T^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
så att
$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{f}_1 + \overrightarrow{f}_2 + \overrightarrow{f}_3$$
vilket betyder att $\overrightarrow{u} = (-1, 1, 1)$ i basen f. Detta kan verifieras genom att ersätta in $\overrightarrow{f}_i$ med de gamla basvektorerna $\overrightarrow{e}_i$ enligt formeln (1) ovan:
$$-\overrightarrow{f}_1 + \overrightarrow{f}_2 + \overrightarrow{f}_3 = -\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3 + (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3) = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{u}$$

3. Uppgiften kan i början uppfattas lite svårare för att vi ombeds arbeta med allmänna värden på konstanterna $x_0, \ldots, D$ men som förklaringen nedan visar inte skiljer sig speciellt från "vanliga" uträkningar med explicit angivna koefficienter. För att beräkna asvtåndet mellan punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$ och planet $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ tar vi en linje l som går genom P och som är ortogonal mot Π. Linjen l har alltså parameterform

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(A, B, C) = (x_0 + tA, y_0 + tB, z_0 + tC)$$

ty $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ är en vektor som är normal mot planet Π. Vi söker nu när skär l och Π varandra dvs. när den löpande punkten på linjen passerar Π. Detta görs genom att sätta linjens ekvation i planets ekvation:

$$A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C(z_0 + tC) + D = 0$$

vilket ger

$$t(A^2 + B^2 + C^2) = -D - Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

varför tiden t där "flugan" slår mot planet (eller, rättare sagt, när den löpande punkten på l passerar Π) blir

$$t = \frac{-D - Ax_0 - By_0 - Cz_0}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Det sökta avståndet blir nu ("sträckan = hastighet gånger tid")

$$d = |t|\,|\overrightarrow{n}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

där absolutbelopp behövs för att undvika negativa avstånd som inte förekommer i euklidisk geometri.

4. För att få den sökta projektionen (låt oss kalla den för l_p) behöver vi dels veta dennes riktningsvektor $\overrightarrow{v}_p$ ("hastighetsvektor") och dels någon punkt på l_p. En punkt som säkert ligger på l_p är skärningspunkten S mellan linjen och planet. Denna punkt får vi genom att först sätta linjens ekvation i planets ekvation; vi får då

$$2(1 + 2t) - 2(2 - t) + 2t = 0$$

vilket ger $t = \frac{1}{4}$. Det betyder att $S = \left(1 + \frac{2}{4}, 2 - \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (Det är lätt att kontrollera att $S \in l \cap \pi$ dvs att S tillhör både l och Π). Det återstår att ta fram $\overrightarrow{v}_p$ som kan fås via en modifikation av projektionsformeln:

$$\overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{v} - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (2, -1, 2) - \frac{8}{9}(2, -2, 1) = \frac{1}{9}(2, 7, 10)$$

där $\overrightarrow{v} = (2, -1, 2)$ är l:s hastighetsvektor och där $\overrightarrow{n} = (2, -2, 1)$ är en vektor normal till planet. Det betyder att den sökta linjen l_p ges av (vi kan bortse från faktorn $\frac{1}{9}$ vid $\overrightarrow{v}_p$):

$$(x, y, z) = S + t\overrightarrow{v}_p = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}, \tfrac{1}{2}\right) + t(2, 7, 10)$$

och man kan lätt kontrollera (genom att sätta l_p i Π:s ekvation) att $l_p \subset \Pi$ dvs att linjen l_p ligger helt och hållet i planet Π.

5. a) Vi visar först att F är isometri genom att visa att $AA^t = E$. Enligt Eulers sats om isometriska avbildningar (se boken, Sats 7.10 sid. 225) är då F antingen en rotation eller en spegling i ett plan följd av en rotation. Vidare, vi har att $\det(A) = -1$ så F måste vara

en spegling + en rotation. Vi kollar nu vilka vektorer som uppfyller $F(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$ (dessa speglas på minus sig själva och är alltså normala till spegelplanet). Vi löser alltså ekvationen $AX = -X$ eller, i koordinaterna:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

eller (efter enkla algebraiska omskrivningar)

$$\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Vi löser alltså ekvationssystem (den oväsentliga faktorn 1/9 kan vi bortse ifrån)

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -8 \\ 4 & 16 & 4 \\ -8 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

vars lösning är $(x, y, z) = t(2, -1, 2)$. Spegelplanets normal $\overrightarrow{n}$ är alltså lika med $\overrightarrow{n} = (2, -1, 2)$ och spegelplanet har ekvationen

$$2x - y + 2z = 0$$

Vidare, vi måste visa att det inte blir någon rotation. Vi tar då en vektor i spegelplanet, t.ex. $(1, 0, -1)$ och verkar på den med matrisen A :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vilket visar att vektorn $(1, 0, -1)$ inte rör sig under avbildningen. Det betyder att spegelplanet inte roterar under F:s verkan och således rotationsvinkeln är 0 dvs F är en ren spegling.

6. a) Se boken, Sats 7.7, sid. 218.

   b) Vi behöver inte beräkna avbildningsmatrisen i detta fall utan vi inser direkt att avbildningens nollrum $N(F)$ (alltså alla vektorer som avbildas på nollvektorn) ges exakt av planet $x - y + 2z = 0$ medan värderummet består av linjen på vilken projektion sker dvs $t(1, 2, 4)$.

7. a) Se boken, Sats 8.2, sid. 239.

   b) Matrisen är symmetrisk så enligt spektralsatsen den har säkert en ON bas bestående av dess egenvektorer. Vi börjar med den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ som blir

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

   vilket ger oss tre olika reella egenvärden: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Motsvarande egenrum E_{λ_i} får vi genom att lösa ekvationer $(A - \lambda_i E)X = 0$ för $i = 1, 2, 3$ och vi får

$$E_{\lambda_1} = t(1, 1, -1), \quad E_{\lambda_2} = t(1, 0, 1), \quad E_{\lambda_3} = t(1, -2, -1),$$

   Så, för att få en ON-bas bestående av avbildningens egenvektorer vi plockar en vektor ur varje egenrum E_{λ_i} och normerar den. Vi får då

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \quad \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad \overrightarrow{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$$

   Denna bas är inte unik utan vi kan ta $\pm$ av varje $\overrightarrow{f}_i$. Man kan lätt kontrollera att det är en ON-bas och även att den består av egenvektorer till vår avbildning. Notera även att det räcker att ta fram t.ex. $\overrightarrow{f}_1$ och $\overrightarrow{f}_2$ ty $\overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{f}_1 \times \overrightarrow{f}_2$ (se Sats 8.1, sid. 237, för förklaring).